Perlinel ad me
~~Michaelem Ruhnken~~ Lewenhard,
Logices studiosum

Math: Un. 5.3

Matheseos. Systemata & methodi

144.

R

Johann Jacob Eberts
Professors der Mathematik zu Wittenberg

Anfangsgründe
der nothwendigsten Theile
der
Mathematik
Michael zum *Nutzen*
Gebrauch der Schulen.

Leipzig
bey Christian Gottlieb Hertel.
1787.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Da meine Unterweisung in den philo=
sophischen und mathematischen Wis=
senschaften, wovon itzt die dritte Auflage her=
auskömmt, in den mathematischen Lehrstun=

den

Vorrede.

den verschiedener Schulen gebraucht wird, auf welchen zu den übrigen Wissenschaften, welche diese Unterweisung enthält, andre Lehrbücher vorgeschrieben sind; so bin ich schon längst von einigen Gelehrten, welche sich meiner Arbeit bey ihrem Unterrichte bedienen, ersucht worden, den mathematischen Artikel des angeführten Lehrbuchs besonders abdrucken zu lassen, damit diejenigen jungen Leute, welche nur in der Mathematik, aber nicht in den philosophischen Wissenschaften, nach demselben unterrichtet werden, nicht genöthiget seyn möchten, mehr zu kaufen, als

sie

sie nothwendig brauchen. Dieses überaus billige Verlangen aber habe ich erst gegenwärtig befriedigen können, weil die nicht ungegründeten Erinnerungen des Herrn Verlegers, der durch die Räubereyen der Nachdrucker schon beträchtlichen Schaden gelitten hat, mir nicht verstatteten, dieses Vorhaben schon bey Veranstaltung der zweyten Auflage meines Lehrbuchs auszuführen. Die Leser finden also in diesem Büchelchen nicht mehr und nicht weniger, als den mathematischen Artikel meiner Unterweisung in den philosophischen und mathematischen Wissenschaften,

mit

Vorrede.

mit den Vermehrungen und Verbesserungen, welche er itzt bey der dritten Auflage erhalten hat. Wittenberg, den 4. September 1786.

Johann Jacob Ebert.

Inhalt.

Einleitung.

Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt. S. 1.

Arithmetik.

Erstes Capitel.

Erklärungen und allgemeine Grundsätze. S. 10.

Zwey

Inhalt.

Zweytes Capitel.

Von der Art und Weise, die Zahlen durch bequeme Zeichen auszudrücken, und eine geschriebene Reihe von Zahlen gehörig auszusprechen S. 21.

Drittes Capitel.

Von den vier gewöhnlichen Rechnungsarten mit ganzen Zahlen S. 26.

Viertes Capitel.

Von den vier Rechnungsarten mit gebrochenen Zahlen S. 60.

Fünftes Capitel.

Von den Dignitäten überhaupt, und von den Quadrat- und Cubikzahlen insbesondre S. 84.

Sech-

Inhalt.

Sechstes Capitel.

Von den Verhältnißen und Proportionen S. 121.

Siebentes Capitel.

Von den Progressionen und Logarithmen. S. 153.

Anhang.

Von den üblichsten Münzen, Maaßen und Gewichten S. 178.

Geometrie.

Erstes Capitel.

Erklärungen und Grundsätze, S. 185.

Zwey-

Inhalt.

Zweytes Capitel.

Von den Linien, Winkeln und Figuren in Ansehung ihrer Gleichheit S. 202.

Drittes Capitel.

Von der Ausmessung der Figuren S. 263.

Viertes Capitel.

Von der Aehnlichkeit der Figuren. S. 277.

Fünftes Capitel.

Von der Ausübung der Geometrie auf dem Felde. S. 298.

Sech-

Inhalt.

Sechstes Capitel.

Von den Eigenschaften der geometrischen Körper und der Art und Weise, dieselben auszumessen S. 326.

Ebene Trigonometrie.

Erstes Capitel.

Erklärungen und allgemeine Gründe der Trigonometrie. S. 364.

Zweytes Capitel.

Von der Ausrechnung der geradelinichten Triangel. S. 391.

Inhalt.

Anhang.

Tafel zur Messung der Bogen und Winkel durch Hülfe der Chorden S. 422

Ein-

Die mathematischen Wissenschaften.

Einleitung in die mathematischen Wissenschaften überhaupt.

§. 1.

Durch die **Mathematik** versteht man diejenige Wissenschaft, welche sich mit Berrachtung der Grössen beschäftiget, und aus einigen Bekannten andre Unbekannte finden lehrt. Die **Größe** aber ist diejenige Eigenschaft der Dinge, vermöge welcher sie sich vermehren oder vermindern lassen. Das Wort **Mathematik** ist, wie bekannt, griechischen Ursprungs, und drückt eigentlich dasjenige nicht aus, was man jetzt dabey denket, indem es nichts als eine **Wissenschaft** oder **Unterweisung** bedeutet. Daß man der Wissenschaft von den Grössen, welche einige Schriftsteller im Deutschen auch **Meßkunst** zu nennen pflegen, diesen Namen gegeben hat, ist ohne Zweifel deswegen geschehen, weil sie wegen der Gewißheit, die man in keinem andern

Theile der menschlichen Kenntnisse so vollkommen antrift, den Namen einer Wissenschaft im vorzüglichen Verstande verdienet. Einige Schriftsteller behaupten auch, es sey deswegen geschehen, weil man bey den alten griechischen Philosophen mit der Mathematik den Anfang im Studieren gemacht, und neben derselben fast keine andre eigentliche Wissenschaft mit der Jugend weiter getrieben habe, so, daß also damals bey einem jungen Schüler Mathematik und Wissenschaft überhaupt einerley gewesen sey.

§. 2.

Die Grösse einer Sache erkennt man entweder unmittelbar durch die Vorstellung unsrer Sinne, oder durch die Vergleichung mit einer andern schon bekannten Größe. Z. E. von der Grösse eines Zolls oder einer Elle erlange ich unmittelbar einen Begriff, wenn mir ein Zoll oder eine Elle gezeigt wird. Die Entfernung aber einer Stadt von einer andern erkennen wir blos dadurch, daß wir sie mit einer bekannten Grösse von eben der Art vergleichen, und sehen, wie oft diese in jener enthalten sey. Diese Beschäftigung, da man eine unbekannte Grösse durch eine bekannte bestimmt, heißt in der Mathematik überhaupt **messen**, ob man gleich im gemeinen Leben dieses Wort nur in einigen Fällen zu gebrauchen pflegt. Denn so nennt man es zwar messen, wenn man die Höhe eines Hauses durch die Länge einer Elle, oder die Entfernung einer Stadt durch die Länge einer Meile u. s. f. bestimmt; aber eine Summe Geld durch eine Grösse von eben der Art, nämlich durch eine bekannte Münze ausdrücken, welches auch eine Art von messen ist, nennt man zählen; eine noch unbekannte Schwere durch eine bekannte ausmessen, nennt man

wägen

wägen u. s. w. Die bekannte Grösse, deren man sich bedient, um eine unbekannte dadurch zu bestimmen, wird das Maaß genannt, und muß allemal, wie man schon aus den vorigen Erklärungen einsehen wird, von eben der Art seyn, von welcher die zu messende Sache ist. Wo sich also kein Maaß ausfindig machen läßt, wovon jedermann sich einen deutlichen Begriff machen kann, da ist auch eine eigentliche Ausmessung unmöglich. Aus dieser Ursache sind bisher alle Bemühungen derjenigen Gelehrten vergeblich gewesen, welche es unternommen haben, die Vollkommenheiten der menschlichen Seele und die Moralität unsrer Handlungen auf eine mathematische Art auszumessen, weil es uns hier an einem solchen Maaße fehlet, welches allen denjenigen, denen man diese Ausmessung mittheilen will, völlig verständlich wäre.

§. 3.

Es ist nicht jederzeit möglich, daß man bey dem Messen diejenige Größe, die man zum Maaße angenommen hat, an die auszumessende unbekannte Grösse bringen kann, sondern oft muß diese Vergleichung der bekannten und unbekannten Größe durch blosse Schlüsse geschehen, ohne daß sich beyde unmittelbar zusammenbringen lassen, wie z. E. bey der Messung der Höhe eines Thurms, oder der Weite eines Sterns von der Erde; und hierinnen besteht vorzüglich das Geschäfte der Mathematik, indem eine unmittelbare Messung eben keine besondre Unterweisung und grosse Geschicklichkeit erfordert. Man kann daher sagen, wenn man eine ausführlichere Erklärung von dieser Wissenschaft geben will: die Mathematik ist diejenige Wissenschaft, welche die Natur und Eigenschaf-

ten der Grössen erklärt, und die Mittel zeigt, wie man aus einigen bekannten Grössen andre noch unbekannte durch Schlüsse entdecken könne.

§. 4.

Um von den Grössen reden zu können, und das Gedächtniß der Lernenden nicht mit einer Menge fremder Namen beschweren zu dürfen, haben die Mathematiker nicht neue Benennungen und Zeichen ausgesonnen, sondern die Buchstaben des Alphabets zu Bezeichnung derselben gewählt. Ein a oder b oder c zeigt also überhaupt eine jede Grösse an, doch so, daß bey einer Aufgabe oder Lehrsatze ein Buchstabe nur einerley Sache bedeutet; weil sonst nothwendig eine Verwirrung entstehn würde. Es ist zwar in vielen Fällen einerley, ob man diese oder jene Buchstaben zu Bezeichnung gewisser Grössen gebraucht; jedoch haben die Mathematiker bey arithmetischen Aufgaben die Regel angenommen, die bekannten Grössen durch die ersten und die unbekannten durch die letzten Buchstaben des Alphabets anzuzeigen. In der höhern Geometrie werden auch die unveränderlichen Grössen mit den erstern und die veränderlichen mit den letztern Buchstaben bezeichnet.

§. 5.

Man pflegt die Mathematik gemeiniglich in die **reine** und **angewandte** einzutheilen. **Rein** nennet man diese Wissenschaft, wenn sie sich blos mit Betrachtung der Grössen überhaupt beschäftiget, ohne die Betrachtung der wirklichen Dinge in der Natur, an denen

nen sich diese Grössen befinden, einzumischen, so wie die Metalle rein genannt werden, wenn sie nicht mit andern Metallen vermischt sind. **Angewandt** hingegen oder **vermischt** heißt die Mathematik alsdenn, wenn sie die Größen der wirklichen Dinge in der Natur untersuchet. So gehöret z. E die Lehre von den Eigenschaften einer Kugel überhaupt in die reine, die Betrachtung der Sonne aber, als eines kugelförmigen Körpers, in die angewandte Mathematik.

§. 6.

So wohl die reine als auch die angewandte Mathematik pflegt man wiederum in verschiedene Theile zu zergliedern, die auch wegen ihres ansehnlichen Umfangs als besondere Wissenschaften angesehen werden. Die reine Mathematik besteht aus den **arithmetischen** und **geometrischen** Wissenschaften, weil es zweyerley Arten von Größen giebt, **stetige** und **unstetige**. **Stetige Grössen** (quantitates continuae) sind solche, deren Theile in einer Verbindung mit einander stehen, und ein zusammenhängendes Ding ausmachen; **unstetige** aber (quantitates discretae) heissen diejenigen, in welchen man blos eine Menge von Dingen als ein Ganzes betrachtet, ohne darauf zu sehen, ob sie sich in einer Verbindung unter einander befinden, oder nicht. So ist z. E. eine Linie oder eine Fläche eine stetige; acht Sterne, oder sieben Personen aber eine unstetige Grösse. Von den stetigen Größen handeln die **geometrischen**, von den unstetigen hingegen die **arithmetischen Wissenschaften**. In den meisten Lehrbüchern pflegt man hieraus vier besondere Wissenschaften zu machen, nämlich die **Arithmetik**, **Geometrie**, **Trigonometrie**

metrie und Algebra. Die Trigonometrie beschäftiget sich eigentlich mit einem geometrischen Gegenstande, nämlich mit den Triangeln, betrachtet aber die Theile derselben als unstetige Grössen, und lehret aus einigen gegebenen Stücken die übrigen durch Rechnung finden. In der Algebra, welche nichts anders ist, als eine allgemeine Arithmetik, sucht man das unbekannte durch Hülfe gewisser Gleichungen zu entdecken. Eine Gleichung aber entsteht, wenn man einerley Grösse auf zweyerley Art ausdrückt. Z. E. wenn ich mir einen Conventionsthaler einmal als die Summe von 32. Groschen und das anderemal als zwey Gulden vorstelle, so habe ich eine Gleichung.

§. 7.

Die Anzahl der Theile oder Wissenschaften, aus denen die angewandte Mathematik bestehet, läßt sich nicht genau angeben, indem sie so viel Theile enthalten kann, als es Gegenstände in der Natur giebt, auf welche sich die Lehren der reinen Mathematik anwenden lassen, daher auch immer noch diese Anzahl durch den Fleiß der Gelehrten vermehrt wird. Insgemein aber pflegt man folgende Wissenschaften zur angewandten Mathematik zu rechnen: Die Statik, Mechanik, Hydrostatik, Hydraulik, Aerometrie, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Perspectiv, Astronomie, Chronologie, Geographie und Gnomonik. Die Statik enthält die mathematischen Lehren von dem Gleichgewichte fester Körper, von deren wirklichen Bewegung die Mechanik handelt. Mit dem Gleichgewichte flüßiger Körper beschäftiget sich die Hydrostatik, und mit

ihrer

ihrer Bewegung die Hydraulik. Die Luft ist der Gegenstand der Aerometrie, und das Licht der Optik, Katoptrik und Dioptrik. In der Optik nämlich betrachtet man diejenigen Lichtstrahlen, die in gerader Linie in unser Auge kommen; in der Katoptrik solche, die von polirten Flächen, dergleichen die Spiegel sind, zurück geworfen werden; und in der Dioptrik solche, die in durchsichtigen Materien gebrochen werden. Das Brechen der Lichtstrahlen aber ist nichts anders, als die Abweichung von ihrer Richtung, wenn sie aus einer dünnern Materie in eine dichtere, oder aus einer dichtern in eine dünnere übergehen. Die Perspectiv lehret die Gegenstände so zeichnen, wie sie in das Gesicht fallen. Von der Bewegung, Grösse und Entfernung der Gestirne handelt die Astronomie. Von der Ausmessung und Eintheilung der Zeit die Chronologie, und von der Eintheilung des Raums auf der Erde die Geographie. Die Gnomonik lehrt Uhren verfertigen, durch welche man vermittelst des Schattens der Sonne oder eines andern Gestirns die Stunde des Tages wissen kann. Alle diese verschiedne Wissenschaften aber könnte man bequem mit dem ehemaligen berühmten Leipziger Lehrer der Mathematik, Hausen, unter vier Hauptclassen bringen, Mechanik, Optik, Astronomie und Chronologie; weil es vier Hauptgegenstände giebt, womit sich die vorhin genannten Wissenschaften beschäftigen, nämlich: die bewegenden Kräfte der Körper, das Licht, die grossen Weltkörper und die Zeit. In vielen mathematischen Lehrbüchern pflegt man noch die bürgerliche Baukunst, Artillerie und Kriegs-Baukunst als Theile der angewandten Mathematik zu betrachten.

Es ist auch nicht zu leugnen, daß alle diese nützlichen Künste sich auf die Lehren der Arithmetik und Geometrie gründen. Allein da der Gegenstand der bürgerlichen und der Kriegs-Baukunst grösstentheils von der Willkühr der Menschen abhängt, die Philosophie aber, wovon die Mathematik ein Theil ist, nur solche Gegenstände betrachtet, die von der Einrichtung des Schöpfers, und nicht von der Willkühr der Menschen herrühren; so kann man dieselben, wenn man genau verfahren will, eigentlich nicht zur Mathematik rechnen, zumal da noch eine Menge andre Kenntnisse zu ihrer Ausübung nöthig sind, die nicht die blosse Mathematik verschaffen kann.

§. 8.

Der Nutzen der Mathematik ist sehr vielfach. Es ist aber schwer, sich von allen den Vortheilen zu überzeugen, welche diese Wissenschaft dem menschlichen Geschlechte verschaffet, ehe man sich die vornehmsten Theile davon bekannt gemacht hat. Ich will also gegenwärtig mich in keine ausführliche Abhandlung über diese Materie einlassen, sondern meinen jungen Lesern nur kürzlich die Ursachen erklären, warum man das Studium der Mathematik allen Jünglingen so nachdrücklich empfehlen muß. Erstlich enthält die Mathematik eine Menge Sätze und Lehren, ohne welche man sich vergebens um eine gründliche Erkenntniß der Natur und der meisten Künste, die zur Nothwendigkeit und zum Vergnügen des menschlichen Lebens gehören, bewerben würde. Selbst die Gottesgelahrheit, die Rechtswissenschaft und Arzneykunst hat ihrer Hülfe sehr oft nöthig; und der Kaufmann und Handwerker kann sich durch die Kennt-

niß

niß derselben in den Stand setzen, seine Fabriken und Manufacturen zu einer viel grössern Vollkommenheit zu bringen. Zum andern aber nützt auch die Mathematik schon durch die Art und Weise, wie sie in gründlichen Schriften abgehandelt wird, welches vorzüglich die Ursache war, weswegen die griechischen Philosophen ihre Erlernung so sehr anpriesen, und einige von ihnen denen so gar den Eingang in ihre philosophischen Vorlesungen versagten, die sich noch nicht mit den Anfangsgründen der Geometrie bekannt gemacht hatten. Durch die Richtigkeit der Beweise und durch die Ordnung, welche man bey dem Vortrage mathematischer Lehren zu beobachten pflegt, wird der Verstand dessen, der sich fleißig mit dem Ueberdenken solcher Wahrheiten beschäftiget, nach und nach zur Gründlichkeit und zum Scharfsinn gewöhnt, so daß er auch hernach in solchen Dingen, die nicht mathematisch sind, richtiger denken und schärfer beweisen lernt als andre, welche ihren Verstand durch das Studium der Mathematik nicht geschärft haben. Die Einwendungen, welche man wider diese Wissenschaft bisweilen gemacht hat, rühren theils von solchen Personen her, welche in der Mathematik unwissend gewesen sind, theils von solchen, welche eine besondere Ehre darinnen gesucht haben, die gewissesten Wahrheiten durch spitzfindige Sophistereien zu bestreiten; daher ich mich dabey nicht aufhalten will.

Die Arithmetik.

Erstes Capitel.
Erklärungen und Grundsätze.

§. 1.

Die Arithmetik, wie den Lesern aus der Einleitung §. 6. noch bekannt seyn wird, ist diejenige Wissenschaft, welche die Eigenschaften der unstetigen Grössen erklärt, und aus einigen bekannten andre unbekannte finden lehrt. Die unstetigen Grössen werden auch Zahlen genannt, die also entstehen, wenn man eine Menge einzelner Dinge von einer Art zusammen nimmt. Jedes von diesen Dingen enthält den Namen der Einheit, und folglich läßt sich keine Zahl ohne eine Einheit gedenken. Bisweilen aber gebraucht man auch das Wort Zahl in einer etwas weitläuftigern Bedeutung, und versteht dadurch eine jede Grösse, die mit einer andern bekannten Grösse verglichen und dadurch bestimmt worden ist, wenn gleich nicht eine Menge einzelner Dinge vorhanden ist oder itzt gedacht wird. In diesem Verstande heißt z. E. der Pfennig eine Zahl, wenn man sich denselben als den zwölften Theil eines Groschen vorstellt. Die

Be=

Beschäftigung, aus einigen bekannten Zahlen andre noch unbekannte zu finden, nennt man mit einem Worte Rechnen, und daher hat man der Arithmetik im Deutschen auch den Namen Rechenkunst beygelegt.

§. 2.

Man theilt die Zahlen in ganze, gebrochne und vermischte ein. Die ganzen Zahlen, welche man auch allemal versteht, so oft man diese Benennung ohne ein Beywort braucht, entstehen, wenn man die Einheit völlig etlichemal nimmt; die gebrochnen hingegen, oder die Brüche, wenn nur ein Theil der Einheit ein oder einigemal gesetzt wird. Also wäre eine Menge von sieben Thalern eine ganze Zahl, hingegen drey Viertel eines Thalers ein Bruch. Zahlen, die aus ganzen und gebrochnen zusammen gesetzt sind, heissen vermischte Zahlen. Da aber die Wahl der Einheit willkührlich ist, so wird man leicht einsehen, daß eine und eben dieselbe Grösse sowohl eine ganze Zahl, als auch ein Bruch seyn kann, nach Beschaffenheit derjenigen Grösse, die man zur Einheit erwählet. Wenn ich also eine gewisse Summe Geldes in eine Zahl verwandeln wollte, so könnte ich entweder eine kleinere oder grössere Grösse, als sie selbst ist, zur Einheit annehmen; im ersten Falle würde ich eine ganze oder vermischte, und im andern Falle eine gebrochne Zahl erhalten. So kann ich mir z. E. einen Gulden nicht nur als sechzehn Groschen, sondern auch als zwey Drittel eines Thalers vorstellen, nachdem ich nämlich entweder einen Groschen oder einen Thaler zur Einheit annehme. Eben so ist klar, daß einerley Grösse bald als eine Zahl,

bald

bald als eine Einheit betrachtet werden kann. Eine Meile z. E. ist eine Einheit, wenn ich dadurch die Entfernungen der Städte oder andrer Oerter bestimme; hingegen wird sie zur Zahl, wenn ich sie mit einer andern Grösse von eben der Art vergleiche. So würde sie z. E. die Zahl 24000 vorstellen, wenn ich sie mit der Länge eines Rheinländ. Schuhs vergleichen wollte. Man pflegt aber bey Erwählung der Einheit dieses zu beobachten, daß man bey ansehnlichen Grössen nicht allzu kleine Einheiten, und bey sehr kleinen Grössen nicht allzugrosse Einheiten annimmt. So bestimmen die Astronomen die Entfernungen der himmlischen Weltkörper von einander nicht in Zollen oder Ellen, weil alsdenn zu grosse, und für das Gedächtniß zu beschwerliche Zahlen entstehen würden, sondern in halben Erddiametern oder wenigstens in Meilen. Hingegen bey der Bestimmung der Weite eines Hauses von einem andern nimmt man nicht den halben Erddiameter, weil man sonst ohne Noth einen grossen Bruch erhalten würde, sondern eine viel kleinere Grösse, nämlich eine Ruthe, Elle oder Schuh zur Einheit an.

§. 3.

Wenn bey einer Zahl zugleich angezeigt wird, was die Einheit für ein Ding sey, so wird sie eine **benannte** oder **bestimmte** Zahl genannt. Die übrigen, wo man nur die Menge der Einheiten anzeigt, heissen **unbenannte** oder **unbestimmte** Zahlen. Z. E. sage ich blos die Zahl drey, die Zahl achte u. s. w. so habe ich unbenannte; sage ich hingegen: drey Thaler, acht Ellen u. s. f. so habe ich benannte Zahlen. Auf diese Eintheilung der Zahlen gründet

sich

sich die bekannte Eintheilung der Arithmetik in die theoretische und praktische. Nämlich theoretisch heißt diese Wissenschaft, wenn sie sich mit den unbenannten, praktisch aber wenn sie sich mit den benannten Zahlen beschäftiget. Homogene oder gleichartige Zahlen nennt man solche, die sich auf einerley Einheit beziehen; und heterogene oder ungleichartige solche, die nicht einerley Einheit haben. Z. E. Fünf Ducaten und drey Ducaten sind gleichartige, hingegen fünf Ducaten und drey Meilen ungleichartige Zahlen.

§. 4.

Jede Veränderung, die man mit den Zahlen vornehmen kann, betrift entweder eine Vermehrung oder eine Verminderung. Aus dem vorhergehenden aber wird man leicht einsehen, daß sich eine Zahl nur durch gleichartige Zahlen vermehren oder vermindern läßt. Wenn man nun eine Zahl vermehrt, so setzt man entweder ungleiche oder gleiche Zahlen zu einander. Und wenn man eine Zahl vermindert, so nimmt man eine andre gleichartige entweder nur einmal von ihr weg, oder so oft, als es möglich ist, bis sie selbst erschöpft wird. Es giebt also bey den Zahlen zwey Arten der Vermehrung, und zwey Arten der Verminderung. Die beyden Arten der Vermehrung heissen addiren, und multipliciren; die beyden Arten der Verminderung subtrahiren und dividiren, und diese machen die so genannten vier Species der Arithmetik aus.

§. 5.

Addiren ist also nichts anders, als aus etlichen gegebenen Zahlen oder Grössen eine andre finden, die allen

allen gegebenen zusammen genommen gleich ist. Diese neue Zahl oder Grösse, welche durch die Addition entstehet, wird die **Summe** oder das **Aggregat** genannt. Das Zeichen der Addition ist +, und wird **plus** ausgesprochen. Z. E. 8 + 9 + 3 ist so viel, als die Summe aus den Zahlen Achte, Neune und Drey, d. i. die Zahl Zwanzig, und a + b + c wäre die Summe aus drey Grössen, die man mit dem Buchstaben a, b, c, benennt hätte.

§. 6.

Multipliciren heißt aus zwey Zahlen eine dritte finden, indem man die eine so oft zu sich selbst setzt, als eine andre Einheiten hat. Diejenige Zahl, die etlichemal zu sich selbst gesetzt werden soll, heißt der **Multiplicandus**, die andre, welche anzeigt, wie vielmal dieses geschehen muß, der **Multiplicator**, und beyde die **Factores**. Die neue Zahl, die nach der Multiplication entsteht, wird das **Product** oder **Factum** genannt. Das Zeichen der Multiplication ist × oder ein Punct. Z. E. 8 × 9 oder 8. 9, will so viel sagen, die Zahl Achte soll mit Neun multiplicirt, d. i. neunmal genommen werden. Hier ist also Achte der Multiplicandus, Neune der Multiplicator, und Zwey und Siebenzig würde das Product seyn. Bey den Buchstaben pflegt man auch oft diese Zeichen ganz wegzulassen, und sie blos neben einander zu setzen, wenn man die Multiplication derselben anzeigen will, weil hier keine Verwirrung, wie bey den Zahlzeichen, die ihren Werth aus der Stelle erhalten, zu besorgen ist. Wollte man also das Product aus der Grösse a in der Grösse b andeuten, so dürfte man nur schreiben ab. Ist einer oder beyde

Facto-

Factores zusammengesetzt, so muß man diejenigen Theile, die zusammen gehören, entweder in Parenthesen einschließen, oder über dieselben eine Linie ziehen, um die Zweydeutigkeit und Verwirrung dadurch zu vermeiden. Sollte also die Summe $5 + 4 + 3$ durch die Summe $2 + 5 + 6$ multiplicirt werden; so müßte man dieses folgendergestalt $\underline{(5 + 4 + 3)} \times \underline{(2 + 5 + 6)}$ oder: $5 + 4 + 3 \times 2 + 5 + 6$ schreiben. Eben dieses ist auch bey den übrigen Rechnungsarten zu beobachten, wenn zusammengesetzte Grössen vorkommen.

§. 7.

Subtrahiren heißt eine Zahl aus einer andern gleichartigen ein einzigesmal wegnehmen, um zu erfahren, wie viel die eine mehr Einheiten hat, als die andre. Die gefundne Zahl, woraus sich dieses ersehen läßt, erhält daher den Namen des **Unterschiedes** oder der **Differenz**. Das Zeichen der Subtraction ist ein Querstrich, welcher **minus** oder **weniger** ausgesprochen und zwischen die beyden gegebenen Zahlen dergestalt gesetzt wird, daß diejenige, welche vermindert werden soll, zuerst stehet. Z. E. $8 - 3$ zeigt an, daß die Zahl Drey aus der Zahl Achte weggenommen werden soll. Schreibt man $24 - (3 + 2 + 4)$; so heißt dieses so viel, daß die ganze Summe, welche aus den Zahlen 3, 2 und 4 besteht, nämlich 9 aus der Zahl 24 weggenommen werden soll.

§. 8.

Dividiren ist diejenige Verminderung einer Zahl, da man eine andre so vielmal aus ihr weg-

nimmt,

nimmt, bis sie völlig erschöpft ist, oder, welches eben so viel sagen will, da man untersucht, wie oft die eine von den gegebenen Zahlen, welche der **Divisor** heißt, in der andern, welche der **Dividendus** genannt wird, enthalten ist. Die durch die Division gefundene Zahl erhält den Namen des **Quotienten.** Das Zeichen der Division besteht in zwey Puncten, die man nach der zu dividirenden Zahl vor dem Divisor setzt, oder in einem Striche, über welchen der Dividendus und unter welchen der Divisor gesetzt wird. Z. E. $8 : 2$ oder $\frac{8}{2}$ heißt so viel, als die Zahl Achte soll durch die Zahl Zwey dividirt werden; 8 ist also der Dividendus, 2 der Divisor, und 4 würde der Quotient seyn.

Grundsätze.

§. 9.

Jede Grösse ist sich selbst gleich, und statt der einen kann man allemal eine andere setzen, die ihr gleich ist.

Z. E. das Product 2×6 ist so viel als die Summe $8 + 4$. Ich würde daher, wenn es meine Bequemlichkeit im Rechnen erforderte, statt des Products 2×6 die Summe $8 + 4$, und so auch umgewendet setzen können.

§. 10.

Alle Theile einer Grösse zusammen genommen sind dem Ganzen gleich; und folglich ist jeglicher Theil oder einige Theile allemal kleiner

ner als das Ganze, und das Ganze grösser als ein oder etliche Theile.

Es bedeute z. E. G ein Ganzes, und a, b, c, alle seine Theile; so werde ich hieraus folgendes schließen können.

G ist so groß als a + b + c, und G ist grösser, als a, grösser als b, grösser als c, grösser als a + b, oder a kleiner als G; b kleiner als G, a + b kleiner als G u. s. w. Das Zeichen gleicher Grössen ist = und ungleicher >, so daß man die Spitze dieses Zeichens gegen die kleinere setzt. Das vorige Beyspiel würde man also folgendergestalt ausdrücken können.

G = a + b + c	oder	20 = 9 + 8 + 3
G > a		20 > 9
G > b		20 > 8
G > c		20 > 3
G > a + b		20 > 9 + 8
a < G		9 < 20
b < G &c.		8 < 20 u. s. f.

§. 11.

Wenn zwey Zahlen oder Grössen einer dritten gleich sind, so müssen sie einander selbst gleich seyn.

Z. E. wenn die Grösse b der Grösse q, und die Grösse c ebenfalls der Grösse q gleich ist, so folgt, daß b so groß ist wie c; oder in Zahlen, wenn der Quotient $\frac{6}{2}$ und die Differenz 8 — 5 der Zahl drey gleich sind, so muß nothwendig der Quotient $\frac{6}{2}$ der Differenz 8 — 5 gleich seyn. Durch Zeichen würde man diese beyden Exempel also schreiben:

$$\frac{\begin{array}{c} b = q \\ c = q \end{array}}{b = c} \qquad \frac{\begin{array}{c} \frac{6}{2} = 3 \\ 8 - 5 = 3 \end{array}}{\frac{6}{2} = 8 - 5}$$

Hierbey ist noch zu merken, daß der Strich nach der zweyten Zeile ebenfalls eine Bedeutung hat, und eigentlich durch die Worte: **Hieraus folgt** oder **folglich ist**, übersetzt werden muß. In den mathematischen Beweisen pflegt man allemal die Prämissen eines Schlusses über den Strich, und die Conclusion unter denselben zu setzen.

§. 12.

Ist eine Grösse oder Zahl grösser, oder kleiner, als die eine von zwey gleichen Grössen, so ist sie auch grösser oder kleiner, als die andere. Z. E.

$$\frac{\begin{array}{c} a = b \\ d > a \end{array}}{d > b} \text{ oder } \frac{\begin{array}{c} 6 = 3 \times 2 \\ 8 > 6 \end{array}}{8 > 3 \times 2}$$

Ferner

$$\frac{\begin{array}{c} a = b \\ g < a \end{array}}{g < b} \text{ oder } \frac{\begin{array}{c} 6 = 3 \times 2 \\ 5 < 6 \end{array}}{5 < 3 \times 2}$$

§. 13.

Gleiches zu Gleichem addirt giebt gleiche Summen. Z. E.

$$\frac{\begin{array}{c} m = f \\ d = g \end{array}}{m + d = f + g} \text{ oder } \frac{\begin{array}{c} 9 = 5 + 4 \\ 3 = 2 + 1 \end{array}}{9 + 3 = 5 + 4 + 2 + 1}$$

§. 14.

§. 14.

Wenn man Gleiches von Gleichem subtrahirt, so entstehen gleiche Unterschiede; z. E.

$$\begin{array}{r} a = n \\ b = c \\ \hline a - b = n - c \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{6}{3} = 2 \\ \hline \frac{8}{2} - \frac{6}{3} = 4 - 2 \end{array}$$

§. 15.

Wenn zu einer Grösse eine andre addirt, und von der Summe die letztere wieder abgezogen wird, so muß die Differenz der erstern Grösse gleich seyn. Z. E.

$a + b - b = a$ oder $9 + 4 - 4 = 9$

§. 16.

Wenn von einer Grösse eine andere Grösse subtrahirt, und zu der Differenz die letztere wieder addirt wird, so muß die Summe der erstern Grösse gleich seyn. Z. E.

$d - m + m = d$ oder $7 - 5 + 5 = 7$

§. 17.

Wenn man Gleiches mit Gleichem multiplicirt, so erhält man gleiche Producte. Z. E.

$$\begin{array}{r} m = q \\ b = f \\ \hline m \times b = q \times f \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r} 2\,\text{Thaler} = 3\,\text{Gulden.} \\ 4 \qquad = 6 \\ \hline 4 \times 2\,\text{Thaler} = 4 \times 3\,\text{Gulden.} \\ \text{d. i.} \quad 8\,\text{Thaler} = 12\,\text{Gulden.} \end{array}$$

§. 18.

Wird Gleiches mit Gleichem dividirt, so müssen die Quotienten gleich seyn. Z. E.

$$\frac{c}{a} = \frac{g}{a} \quad \text{oder} \quad \frac{36}{2} = \frac{4 \times 9}{2}$$

§. 19.

Wenn man eine Grösse durch eine andre Grösse multiplicirt, und das Product durch die leztere wieder dividirt, so muß der Quotient der erstern Grösse gleich seyn.

$$\frac{c \times d}{d} = c \quad \text{oder} \quad \frac{5 \times 6}{6} = 5$$

$$\frac{b \times g \times m}{g \times m} = b \qquad \frac{3 \times 4 \times 7}{4 \times 7} = 3$$

§. 20.

Wenn man eine Grösse durch eine andre dividirt, und den Quotienten durch die leztere wieder multiplicirt, so muß das Product der erstern Grösse gleich seyn. Z. E.

$$\frac{a}{c} \times c = a \quad \text{oder} \quad \frac{8}{3} \times 3 = 8$$

Zweytes Capitel.

Von der Bezeichnung der Zahlen.

§. 21.

Ehe wir uns mit der Vermehrung und Verminderung der Zahlen selbst beschäftigen, wird es nöthig seyn, eine kurze Betrachtung über die Art und Weise, wie man die Zahlen bezeichnet, anzustellen. Da die Menge der Zahlen unendlich groß ist, so würde es unmöglich gewesen sey, jeder Zahl ein besondres Zeichen und einen besondern Namen zu geben. Man hat also ein bequemes Mittel ersonnen, durch die Verbindung sehr weniger Zeichen und Namen alle mögliche Zahlen auszudrücken; und dieses Mittel, dessen man sich jetzt fast überall bedient, ist folgendes. Man nimmt neun Zeichen an, welche man Zahlen bedeuten läßt, und über dieses noch ein andres, das man Null nennt, und welches die Abwesenheit aller Zahlen andeutet. Um also mit diesen wenigen Zeichen alle mögliche Zahlen anzuzeigen, giebt man ihnen einen verschiedenen Werth nach der Verschiedenheit ihrer Stellen, die man von der Rechten gegen die Linke zu zählet. Nämlich ein jedes Zahlzeichen bedeutet in der zweyten Stelle zehnmal mehr, als in der ersten, in der dritten zehnmal mehr, als in der zweyten, in der vierten zehnmal mehr, als in der dritten, und überhaupt in jeder Stelle weiter gegen die Linke zehnmal mehr, als in der vorhergehenden. Die Zeichen selbst, die man auch Ziffern zu nennen pflegt, sind folgende: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

8. 9. 0. wovon die erstern neune lauter Zahlen bedeuten, das letzte Zeichen aber die Null vorstellt, wie meinen jungen Lesern schon hinlänglich bekannt seyn wird. Wenn man also die Einheit in die zweyte Stelle setzt, welche man dadurch andeutet, daß man die erste Stelle mit 0 anfüllt, (10) so bedeutet sie eine zehnfache Einheit, oder ein **Zehner** nach unsrer Sprache. In der dritten Stelle (100) einen zehnfachen Zehner oder **Hunderter**; in der vierten Stelle (1000) einen zehnfachen Hunderter, d. i. einen **Tausender**; in der fünften Stelle (10000) einen zehnfachen Tausender, u. s. w. welche Namen man aus den vorhergehenden zusammen setzt. Einen tausendfachen Tausender, oder die Einheit in der siebenten Stelle (1000000) nennt man auch der Kürze wegen eine **Million**; tausendmal tausend Millionen (1000 000 000 000) eine **Billion**; tausendmal tausend, oder eine Million Billionen eine **Trillion**, u. s. w. Da nun aus den Einheiten die Zahlen entstehen, so wird man leicht einsehen, wie es möglich sey, durch die Zusammensetzung der angeführten Figuren, deren Werth eben so, wie der Werth der Einheiten, mit ihren Stellen zunimmt, auch die grösten Zahlen auf eine leichte Art auszudrücken. In Ansehung der Bezeichnung ist noch dieses zu erinnern, daß man die verschiednen Classen von Einheiten auch folgendergestalt anzuzeigen pflegt.

Nämlich	I	schreibt man auch	IO
	IO	— —	II
	IOO	— —	III
	IOOO	— —	IIII
	IOOOO	— —	IIIV
	IOOOOO	— —	V u. s. f.

und

und so auch die übrigen Zahlzeichen, welches in vielen Fällen einige Bequemlichkeit verschaft. Man wird diese Art zu schreiben leicht merken können, wenn man nur erwägt, daß die oben rechter Hand gesetzte römische Zahl, welche der **Exponent der Zifer** genannt wird, und wofür auch einige die gewöhnlichen kleinen Zahlzeichen nehmen, die Anzahl der Nullen vorstellt, womit man auf die gewöhnliche Art die Stelle einer Zahl, oder ihren eigentlichen Werth andeutet. 9^{VII} ist eben so viel, als 90000000. Uebrigens heissen **einfache Zahlen** solche, die mit einer Zifer, und **zusammengesetzte** diejenigen, die mit mehr als einer Zifer geschrieben werden müssen. Also wäre 9 eine einfache, und 38 eine zusammengesetzte Zahl, weil die letztere aus 3 Zehnern und 8 Einern besteht.

§. 22.

Wenn man das vorige recht versteht, so wird man keine besondere Anweisung nöthig haben, eine vorgesagte Zahl durch die üblichen Zeichen auszudrücken, oder eine geschriebene Reihe von Zahlen gehörig auszusprechen, welches in der Arithmetik **Numeriren** genannt wird. Sollte man also folgende Zahl: **Acht Millionen, vier Tausend drey Hundert und Vierzig** schreiben; so dürfte man sich nur an die vorhin erklärten Regeln erinnern, daß die Millionen in der siebenten Stelle, die Tausende in der vierten, die Hunderte in der dritten, und die Zehner in der zweyten Stelle zu stehen kommen, und die Null alsdenn gebraucht wird, wenn es von einer gewissen Classe keine Zahl giebt, und doch der folgenden wegen die Stelle bemerkt werden muß, nämlich:

8004340.

Eben so leicht wird es seyn, die größte Reihe von Zahlen richtig zu lesen, wenn man die Zifern nur erst von der Rechten gegen die Linke zu betrachter, und sich, um die Verwirrung zu vermeiden, und dem Gedächtnisse zu statten zu kommen, einige Stellen durch gewisse willkührliche Zeichen bemerkt. Z. E. es sey folgende Reihe gegeben:

t . b . m .
435678293640000085̇23 .

Wir wollen also, um bey diesen vielen Zahlen die Stellen derselben und ihren Werth desto leichter merken zu können, die Hunderte mit einem Pünctchen unter der Zifer, und die Tausende durch ein Pünctchen über der Zifer; die Millionen durch m, die Billionen durch b, die Trillionen durch t, u. s. f. bezeichnen. Nun werden wir die Zahl, wie unsre übrige Schrift, von der Linken gegen die Rechte zu, ohne Schwierigkeit lesen können, wenn wir nur noch den kleinen Eigensinn des Sprachgebrauchs bemerken, daß man bisweilen die kleinere Zahl vor der grössern auszusprechen pflegt. Denn 23 sollte man eigentlich lesen, zwanzig und drey; die Gewohnheit aber verlangt, drey und zwanzig zu sprechen. Die vorige Reihe von Zahlen würde daher folgendergestalt ausgesprochen werden. Vier Trillionen, drey hundert sechs und funfzig tausend sieben hundert zwey und achtzig Billionen, neun hundert sechs und dreysig tausend, vier hundert Millionen, acht Tausend, fünf hundert und drey und zwanzig.

§. 23.

§. 23.

Ob man gleich an diese Art bis auf zehen zu zählen von Kindheit an gewöhnt ist, weswegen sie vielen Ungeübten als eine nothwendige Sache vorkommen wird; so ist dieselbe doch in der That eben so willkührlich, als es die Zifern sind, womit die Zahlen bezeichnet werden: daher auch einige Gelehrte andre Arten zu zählen angegeben haben. So lehrt z. E. der berühmte Baron Leibnitz durch das Zeichen der Einheit und Null alle mögliche Zahlen zu schreiben. Nämlich er nimmt dieses willkührliche Gesetz an, daß die folgende Stelle, von der Rechten gegen die Linke zu gerechnet, allemal zweymal so viel bedeuten soll, als die vorhergehende. Nach dieser Art zu zählen, welche man die Leibnitzische Dyadik nennt, weil man nur bis auf zwey zählt, würde also

10	so viel bedeuten	als		2
11	—	—	—	3
100	—	—	—	4
101	—	—	—	5
110	—	—	—	6
111	—	—	—	7
1000	—	—	—	8
1001	—	—	—	9
1010	—	—	—	10
1011	—	—	—	11
1100	—	—	—	12
1101	—	—	—	13
1110	—	—	—	14
1111	—	—	—	15
10000	—	—	—	16 u. s. f.

Wollte man mit einigen Gelehrten nur bis auf viere zählen, um alle mögliche Zahlen mit vier Zeichen schreiben

ben zu können; so müßte man jede Zifer in der folgenden Stelle, von der Rechten gegen die Linke zu gerechnet, viermal so viel als in der vorhergehenden gelten lassen. Auf diese Art würde

10	so viel	bedeuten	als	4
11	—	—	—	5
12	—	—	—	6
13	—	—	—	7
20	—	—	—	8
21	—	—	—	9
22	—	—	—	10
23	—	—	—	11
30	—	—	—	12
31	—	—	—	13
32	—	—	—	14
33	—	—	—	15
100	—	—	—	16 u. s. f.

Drittes Capitel.

Von den vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

§. 24.

Nachdem ich also die nothwendigsten Erklärungen, Grundsätze und Zeichen der Zahlen angeführt habe; so will ich nunmehr die vier Rechnungsarten selbst kürzlich durchgehen. Ich mache also den Anfang mit der Addition, welche aus einigen gegebenen Zahlen eine neue finden lehrt, die so viel Einheiten enthält, als alle gegebene zusammen genommen. Da

sich

sich aber eine Zahl nur durch gleichartige Zahlen vermehren läßt (§. 4.); so ist klar, daß die Addition bey solchen Zahlen nicht statt finden wird, die sich auf verschiedne Einheiten beziehen. Man kann also 3 Stunden und 5 Thaler unmöglich zusammensetzen. Aus eben dem Grunde läßt sich leicht einsehen, daß die Summe sich auf eben die Classe von Einheiten beziehen muß, auf welche sich die addirten Zahlen beziehen. Addirt man Einer, so wird die Summe auch Einer bedeuten; addirt man Zehner, so wird man zur Summe auch Zehner erhalten u. s. f.

§. 25.

Die meisten Zahlen, welche addirt werden sollen, sind zusammengesetzt, und können wegen ihrer Grösse nicht auf einmal addirt werden. Man pflegt daher die gleichartigen Theile derselben unter einander zu setzen, und sie nach und nach zusammen zu zählen; weil es nach dem §. 10. angeführten Grundsatze einerley seyn muß, ob ich ein Ganzes zu einem andern Ganzen auf einmal addire, oder ob ich alle Theile des einen zu den Theilen des andern hinzu setze; wozu nur dieses erfordert wird, daß man im Stande sey, zwey einzelne Zahlen auf einmal zu addiren, welches man im Anfange durch die Finger, oder durch Rechenpfennige so lange zu thun pflegt, bis man durch die Uebung dieses Zusammenzählen in Gedanken verrichten kann. Wir wollen also setzen, es sollten folgende Zahlen addirt werden: 3458. 457. 1832. 4378. 37. Diese muß man zuerst also schreiben, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte

unter

unter Hunderte u. s. f. zu stehen kommen; (§. 24.) nämlich:

3 4, 5 8,
4 5, 7,
1 8, 3 2
4 3 7, 8,
3 7
---
1 0 1 6 2

Hierauf ziehe man einen Strich, und zähle alle Einer, alle Zehner, alle Hunderte und alle Tausende zusammen. Weil nun zehn Einer einen Zehner, zehn Zehner einen Hunderter u. s. f. ausmachen, so würde man erstlich bey den Einern nur Achtung geben dürfen, wie vielmal man bis auf zehen habe zählen können, und wie viel noch übrig geblieben sey. So vielmal man bey den Einern bis auf zehen zählen kann, so viel hat man Zehner, die man also zur folgenden Reihe rechnen muß. Eben so würde man auch mit den folgenden Reihen verfahren können, um die Summen derselben zu erhalten. Damit man es aber nicht vergißt, wie vielmal man bis zehen gezählt hat, sonderlich bey grossen Exempeln, so pflegt man sich bey den Zahlen durch einen Punct oder Strich ein Merkmal zu machen; hernach zählt man die Striche oder Puncte, und rechnet so viel Einheiten zur folgenden Reihe, als man solcher Puncte oder Striche gezählt hat. Die vorigen Zahlen würde man daher also addiren: 7 und 8 Einer sind 15, folglich 5 Einer über einen Zehner; diesen Zehner bemerke ich bey der 8 durch ein Comma. 5 Einer und die folgenden 2 machen 7, und diese wieder zu 7 addirt, 14, d. i. 4 über 10; daher ich wieder das vorige

Merk=

Merkmal bey der 7 anbringe. Die jetzt übrig gebliebene 4 und 8 geben 12 Einer, d. i. 2 Einer über einen Zehner. Nunmehr setze ich, da keine Einer mehr zu addiren sind, diese 2 übrig gebliebenen Einer unter den Strich an die erste Stelle, und addire die folgende Reihe der Zehner, wie die vorige, indem ich noch die 3 Zehner, die aus der Addition der Einer entstunden, darzu zähle; so erhalte ich 6 Zehner, welche ich in die gehörige Stelle setze, und noch überdieses 2 Hunderte, die ich zur folgenden Reihe nehme, wo sich die Hunderte befinden. Zähle ich nun auf gleiche Art alle Hundert zusammen, so erhalte ich 1 Hunderter und 2 Tausende. Rechne ich endlich diese 2 Tausende zu der 4ten Reihe, wo die Tausende stehen, so erhalte ich 10 Tausende, und folglich zur ganzen Summe 10162. Die beste Probe der Addition ist, daß man ein Exempel mehr als einmal rechnet. Erhält man allemal einerley Summe; so kann man nach der grösten Wahrscheinlichkeit schliessen, daß man richtig addirt habe.

§. 26.

Die benannten Zahlen werden eben so, wie die unbenannten, addirt, nur daß man genau wissen muß, wie viel kleinere Einheiten eine grössere Einheit ausmachen. Im Anhange sollen daher einige Tabellen von der verschiedenen Eintheilung des Geldes, Maasses und Gewichtes folgen. Weiß man also, daß ein Thaler 24 Groschen, und ein Groschen 12 Pfennige enthält; so wird man leicht Zahlen addiren können, die aus Thalern, Groschen und Pfennigen bestehen. Denn bey den Pfennigen darf man nur immer bis auf 12, und bey den Groschen bis auf 24 zählen. So viel=

vielmal als man bey den Pfennigen bis auf 12 gezählt hat, so viel Einheiten müssen zu den Groschen gerechnet werden, und so vielmal bey den Groschen bis auf 24 gezählt worden ist, so viel Einheiten müssen zu den Thalern gerechnet werden. Z. E.

235	Thaler	8,	Groschen	7,	Pfennige.
102	—	20	—	5	—
18	—	9,	—	8,	—
200	—	15	—	3	—
25	—	6,	—	9,	—
16	—	16	—	6	—
599	—	5	—	2	—

Bey den Pfennigen kann ich 3 mal bis auf 12 zählen, und behalte noch 2 übrig. Die Summe der Pfennige beträgt also 3 Groschen und 2 Pfennige Diese 2 Pfennige setze ich an die Stelle der Pfennige, und rechne die 3 Groschen zur folgenden Classe, welche lauter Groschen enthält. Bey den Groschen kann ich 3 mal bis auf 24 zählen, und behalte noch 5 Einheiten übrig. Die Summe aller Groschen beträgt daher 3 Thaler und 5 Groschen. Diese 5 Groschen setze ich wieder an die gehörige Stelle, und rechne die 3 Thaler zu der folgenden Classe der Thaler, so ist die ganze Addition geendiget.

Wollte man sich die Addition der benannten Zahlen ganz allgemein vorstellen, so dürfte man nur statt Thaler, Groschen u. s. w. Buchstaben setzen, z. E. a, b, c, u. s. f. Diejenigen Grössen, welche durch einerley Buchstaben ausgedrückt werden, müßte man also für gleichartige ansehen und wirklich zusammen addiren; bey den übrigen aber, die durch verschiedne

Buch-

Buchstaben angedeutet werden, könnte man nur die Addition durch das gewöhnliche Zeichen anzeigen. Z. E.

8	a	+	6	b	+	3 c
4	a	+	7	b	+	9 c
5	a	+	3	b	+	c
Summe 17	a	+	16	b	+	13 c

Hingegen:

5	a	+	2	b	+	7 c
6	a	+	7	m	+	39
Summe 11	a	+	2 b	+	7 m	+ 7 c + 39

§. 27.

Soll man eine zusammengesetzte Zahl von einer andern zusammengesetzten Zahl subtrahiren, so muß man ebenfalls die gleichartigen Theile unter einander setzen (§. 4.), und dieselben nach und nach von einander abziehen; wobey die Subtraction der einfachen und kleinern voraus gesetzt wird, welche man entweder in Gedanken, oder wenn man noch nicht geübt genug ist, an den Fingern verrichtet. Ist der abzuziehende untere Theil grösser, als der obere, aus welchem er weggenommen werden soll; so geht man zur folgenden Classe linker Hand, und nimmt davon eine Einheit herüber, welches man borgen heißt, und durch einen Punct bemerkt. Eine solche Einheit muß also nothwendig 10 Einheiten der vorhergehenden Classe ausmachen (§. 21.). Hat man nun damit die zu kleine Zahl vermehrt, so zieht man die untere Zahl davon ab, und setzt den Unterschied an den gehörigen Ort; welches man so lange fortsetzt, bis

man

man alle Theile der untern Zahl von allen gleichartigen Theilen der obern Zahl subtrahiret hat. Z. E. soll man 25367 von 82932 abziehen; so schreibt man zuerst diese beyden Zahlen untereinander:

8 2 9 3 2
2 5 3 6 7
5 7 5 6 5

Nunmehr fängt man bey den Einern an. Hier sollen 7 Einer von 2 Einern weggenommen werden; welches aber unmöglich ist. Man geht also in die folgende Classe, und borgt von den 3 Zehnern eine Einheit, welches durch den Punct angedeutet wird. Dieser Zehner, welcher 10 Einer enthält, macht mit den 2 Einern 12 Einer aus, von denen ich nunmehr leicht 7 Einer wegnehmen kann, und noch 5 Einer übrig behalte, die man unter den Strich an die Stelle der Einer setzt. 6 Zehner von 2 Zehnern, (denn von den 3 Zehnern war vorhin einer verborgt worden) können ebenfalls nicht abgezogen werden; man muß also hier wieder von der folgenden Classe einen Hunderter borgen, welcher zehn Zehner gilt, und zu den 2 Zehnern hinzugesetzt, 12 Zehner ausmacht. Wenn man nun 6 Zehner von diesen 12 Zehnern abzieht, so bleiben noch 6 Zehner übrig, welche wiederum unter den Strich in die Stelle der Zehner gesetzt werden. Statt der 9 Hunderte stelle ich mir alsdenn oben nur 8 Hunderte vor, weil vorhin ein Hunderter zu den Zehnern genommen wurde, ziehe davon die untern 3 Hunderte ab, welches ohne Borgen geschehen kann, und setze die übrig gebliebenen 5 Hunderte an die gehörige Stelle. 5 Tausende lassen sich aus 2 Tausenden wiederum nicht wegnehmen, es muß also ein Zehntau-

tausender geborgt, und zu den 2 Tausenden hinzugesetzt werden, wodurch 12 Tausende entstehen, von welchen sich 5 Tausende nunmehr leicht abziehen lassen. Der Ueberrest 5 Tausend wird an die Stelle der Tausende gesetzt, und endlich der letzte Theil, nämlich 2 Zehntausende von 7 Zehntausenden subtrahirt, wodurch man 5 Zehntausende, und also zur ganzen Differenz 57565 erhalten muß; weil alle Theile der untern Zahl aus der obern abgezogen worden sind, und alle Theile zusammen genommen dem Ganzen gleich gelten.

§. 28.

Man darf nur die Erklärung der Subtraction erwägen, so wird man von selbst schon einsehen, wie man den gefundenen Unterschied prüfen könne. Denn da der Unterschied diejenige Zahl ist, welche anzeigt, wie viel Einheiten in der grössern Zahl mehr enthalten sind, als in der kleinern; so muß die Summe der kleinern Zahl und der Differenz so viel betragen, als die grössere. Wollen wir also die Probe von dem vorigen Exempel machen, so dürfen wir nur den Unterschied und die kleinere Zahl addiren.

```
  25367
  57565
 -------
  82932
```

Die Summe von beyden beträgt 82932 und ist folglich der grössern von den beyden gegebenen Zahlen, aus welcher subtrahirt wurde, gleich; wodurch die Richtigkeit der Rechnung vollkommen bestätiget wird.

§. 29.

Bisweilen steht an dem Orte, wo man borgen will, eine Null, von welcher sich nichts wegnehmen läßt, weil sie keine Zahl bedeutet. In diesem Falle geht man weiter, bis man eine wirkliche Zahl antrift, und verfährt folgendergestalt. Es sey z. E. von 403 die Zahl 276 abzuziehen

4 0 3
2 7 6
---
1 2 7

Sechs Einer lassen sich nicht von 3 Einern abziehen, ich sollte daher einen Zehner borgen; weil aber in der Stelle der Zehner eine Null stehet, so gehe ich zu den Hunderten, nehme einen davon, und setze ihn in Gedanken an die Stelle der Zehner, wo er 10 Einheiten bedeutet, von welchen 10 Zehnern ich einen zu den 3 Einern hinzusetze, die nunmehr zusammen genommen 13 Einer ausmachen müssen. Ich stelle mir daher die obere Zahl 403 eigentlich also vor: 3 Hunderte, 9 Zehner, und 13 Einer, in welcher Gestalt ich hernach die Subtraction nach den vorigen Regeln verrichte, und zum Unterschiede 127 erhalte. Man wird also aus dieser Erklärung die Ursache leicht einsehen, warum man sich an dem Orte, wo eine Null steht, wenn man hat borgen müssen, 9 Einheiten vorstellt.

§. 30.

Bisher haben wir solche Fälle betrachtet, wo die ganze zusammengesetzte Zahl, welche subtrahirt werden soll, kleiner ist, als diejenige, aus welcher sie weggenommen werden muß, obgleich bisweilen der ab-

abzuziehende Theil grösser war, als derjenige, aus welchem er weggenommen werden sollte. Es giebt aber auch Fälle, wo ein grösseres Ganze von einem kleinern subtrahirt werden soll; in solchen Fällen nimmt man so viel weg, als möglich ist, und bemerkt durch das Zeichen der Subtraction, wie viel man noch eigentlich hätte wegnehmen sollen. Z. E. es sey 25 von 20 zu subtrahiren. Aus 20 Einern kann man aufs höchste nur wieder 20 Einer wegnehmen. Folglich würde ich hier 5 Einer übrig behalten, die subtrahiret werden sollten, und nicht subtrahiret werden könnten; welche Differenz durch — 5 ausgedrückt wird. Eben so wäre

$$7 - 9 = -2$$
$$\text{und} \quad 5 - 8 = -3$$

Man subtrahirt also in dergleichen Fällen eigentlich umgewendet, und setzt zu dem Ueberreste, um dieses anzudeuten, das Zeichen — oder minus. Dergleichen Unterschiede pflegt man auch **negative** Zahlen zu nennen, und setzt sie den **positiven** entgegen, welche man entweder an dem Zeichen + oder an der Abwesenheit eines Zeichens erkennet, und deren Entstehungsart man sich so vorstellen kann, daß eine kleinere Zahl von einer grössern abgezogen worden sey. Man nennt überhaupt diejenigen Grössen von einer Art **entgegengesetzt**, die man unter solchen Bedingungen oder Umständen betrachten kann, wo eine durch die andere vermindert wird. Setzt man die eine als **positiv** oder **bejahend**, welches von unsrer Willkühr abhängt, so wird die andre, welche ihr entgegengesetzt ist, **negativ** oder **verneinend** genannt. Z. E. 100 Schulden und 100 Thaler baares Geld sind Grössen von einer Art, die aber einander ver-

mindern, wenn sie mit einander verbunden werden. Denn wenn ich das Vermögen eines Menschen bestimmen will; so muß ich dasjenige, was er andern schuldig ist, von demjenigen, was er wirklich besitzt, abziehen, und folglich wird das baare Geld oder wirkliche Vermögen durch die Schulden vermindert, daher man das baare Geld und die Schulden als entgegengesetzte Grössen ansehen muß. Betrachtet man nun das baare Geld als positiv, so werden die Schulden negativ seyn; wollte man aber die Schulden für positiv annehmen, so würde das baare Geld negativ werden. Im ersten Falle, wenn nämlich das baare Geld oder das wirkliche Vermögen als positiv angenommen wird, hätte also der Ausdruck, Cajus besitzt 1500 Thaler negatives Vermögen, diese Bedeutung: Cajus ist nicht nur ganz ohne Vermögen, sondern er ist noch über dieses 1500 Thaler schuldig. Hieraus kann man zugleich den Grund einsehen, warum die negativen Grössen weniger als nichts genannt werden. Wer ohne Vermögen, und noch über dieses 1500 Thaler schuldig ist, der besitzt in der That noch weniger, als der, der zwar nicht einen Pfennig im Vermögen, aber auch keine Schulden hat. Der Ausdruck, weniger als nichts, muß also nicht unrecht verstanden werden. Denn wenn man die negativen Grössen nicht in Beziehung auf die positiven betrachtet; so sind sie mehr als nichts, und überhaupt eben so gut wirkliche Grössen, als die positiven. Dergleichen entgegengesetzte Grössen würde man auch bey der vorwärts und rückwärts, bey der oberwärts und unterwärts gehenden Bewegung eines Körpers, und in vielen andern Fällen mehr haben. Setze ich die Bewe-

wegung eines Körpers von Abend gegen Morgen positiv, so würde die entgegengesetzte von Morgen gegen Abend negativ seyn; nenne ich die Bewegung eines Körpers in die Höhe positiv, so muß ich die entgegengesetzte Bewegung in die Tiefe als negativ ansehen. Aus dieser Ursache pflegt man auch in der höhern Geometrie die Lage der Puncte einer krummen Linie durch Plus und Minus auszudrücken. Denn nimmt man ein Paar gerade Linien, die einander durchschneiden, als Beziehungslinien an, und betrachtet man die Entfernung derjenigen Puncte, welche sich über der einen Beziehungslinie befinden, als positiv; so muß man die Entfernung derjenigen Puncte, die unter diese Linie fallen, als negativ ansehen. Auf eben die Art werden die Entfernungen der Puncte, welche in Ansehung der andern Beziehungslinie rechter Hand liegen, negativ werden, sobald man die Entfernungen derjenigen Puncte, welche linker Hand liegen, als positiv betrachtet.

§. 31.

Die Subtraction der benannten Zahlen erfordert keine besondere Regeln, wenn man nur die Eintheilung der Dinge weiß, welche die benannten Zahlen anzeigen. Wer unbenannte Zahlen von einander subtrahiren kann, wird z. E. von 239 Centnern 18 Pfunden 4 Lothen, 48 Centner 83 Pfund 20 Loth sehr leicht abziehen können, wofern ihm nur bekannt ist, daß der Centner 110 Pfund, und das Pfund 32 Loth enthält. Die Rechnung selbst würde folgende seyn:

2	39	Centner	18 Pf.	4 Loth.
48			83 Pf.	20 Loth.
190	Centn.		44 Pf.	16 Loth.

Zuerst soll man 20 Loth von 4 Loth wegnehmen, welches nicht angeht; man muß also von den 18 Pfunden eins borgen. Ein Pfund oder 32 Loth verbunden mit 4 Loth macht 36 Loth, von welchen nunmehr 20 Loth weggenommen werden können. Der Ueberrest ist 16 Loth. 83 Pfund lassen sich von 17 Pfund auch nicht abziehen. Borgt man also 1 Centner, d. i. 110 Pfund, und setzt diese zu 17 Pfund, so erhält man 127 Pfund, von welchen der Abzug der 83 Pf. möglich ist, welches wohl keiner weitern Erklärung bedarf. Der ganze Unterschied, wenn man noch die übrigen Zahlen von einander subtrahirt, beträgt also 190 Centner 44 Pfund 16 Loth.

Auf eine ähnliche Art würde man auch bey Buchstaben verfahren; wobey nur dieses zu bemerken ist, daß man hier nicht borgen kann, weil man in solchen allgemeinen Ausdrücken nicht weiß, wie viel a oder b dazu gehören, um ein c, ein d u. s. f. auszumachen. Anstatt also von der folgenden Grösse zu borgen, zeigt man blos durch das Zeichen Minus an, was sich nicht hat abziehen lassen, und drückt also den Unterschied negativ aus. Z. E.

$$\begin{array}{r} 12\,c + 8\,b + 3\,a \\ 4\,c + 2\,b + 9\,a \\ \hline \text{Unterschied} \quad 8\,c + 6\,b - 6\,a \end{array}$$

§. 32.

Sollen Zahlen in einander multipliciret werden, so sind entweder beyde Factores einfach, oder nur einer, oder keiner. Die Multiplication der zusammengesetzten Zahlen setzt die Multiplication der einfachen

sachen voraus. Daher mit dieser der Anfang gemacht werden muß. Wenn man die Erklärung der Multiplication (§. 6.) erwägt; so wird man leicht einsehen, daß sie nichts anders ist, als eine wiederhohlte Addition. Man würde also z. E. das Product aus der Zahl 6 in die Zahl 5 leicht finden können, wenn man die Zahl 6 fünfmal zu sich selbst addirte. Man kann sich daher durch Hülfe der blossen Addition ein Täfelchen aufsetzen, worinnen die Producte aller einfachen Zahlen in einander enthalten sind, und welches man das **Pythagorische Täfelchen** oder das **Einmaleins** zu nennen pflegt. Man verzeichnet sich nämlich ein Viereck, und theilet dasselbe in 9 Reihen, und jede Reihe wieder in 9 Fächer oder kleinere Vierecke. In die oberste Reihe schreibt man die 9 einfachen Zahlen nach ihrer Ordnung; nun addirt man jede Zahl zu sich selbst, um das doppelte davon zu erhalten, und setzt dieses doppelte einer jeden Zahl in die zweyte Reihe. Zu jeglicher Zahl der zweyten Reihe addirt man wieder die darüber stehende Zahl der ersten Reihe, wodurch man nothwendig das dreyfache von jeder obern Zahl erhalten muß. Dieses dreyfache kömmt in die dritte Reihe; und wenn man nun hierzu wieder das einfache oder die Zahlen der ersten Reihe hinzusetzt, so entsteht das vierfache von jeder Zahl, welches in die vierte Reihe geschrieben wird. Fährt man nun mit dieser Beschäftigung fort, indem man immer die letzte Reihe und die obern Zahlen zusammen addirt, bis man auf das neunfache gekommen ist, so muß man hierdurch eine Tabelle, wie die folgende, erhalten, worinnen sich die Producte aller einfachen Zahlen in einander befinden, die man hernach bey der Multiplication der

zusammengesetzten Zahlen sehr vortheilhaft gebrauchen kann.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.
8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.

Es sey also durch Hülfe des hier verzeichneten Täfelchens das Product 7×8 zu bestimmen. Wenn ich nachsehe, was für eine Zahl in der achten Reihe unter der 7 steht, so werde ich die Zahl 56 finden, welche also das achtfache von 7 oder das Product 7×8 seyn muß. Eben dieses Product würde ich auch erhalten, wenn ich das siebenfache von der Zahl achte suchte; woraus man also sehen kann, daß siebenmal acht so viel ist, als acht mal sieben, und daß es also einerley seyn muß, ob ich die Zahl acht als den Multiplicator oder als den Multiplicandum betrachte. Eben dieses wird man in allen übrigen Beyspielen finden; daher man sich den Satz merken kann, daß die Ordnung der Factoren etwas willkührliches ist, und daß überhaupt $a \times b$ so viel seyn muß als $b \times a$.

§. 33.

§. 33.

Sollte nun eine zusammengesetzte Zahl durch eine einfache multipliciret werden, z. E. 43785 durch 9, so würde dieses auf folgende Art geschehen können, ohne daß man nöthig hätte, die Zahl 43785 neunmal zu sich selbst zu addiren, welches schon eine zu weitläuftige Arbeit wäre, und in andern Fällen noch beschwerlicher seyn würde. Nämlich weil das Ganze und alle Theile zusammengenommen einander gleich sind (§. 10.); so muß es einerley seyn, ob man die vorige Zahl auf einmal durch 9 multiplicirt, oder ob man diese Vervielfältigung mit allen ihren Theilen nach und nach vornimmt. Man schreibt daher die beyden Zahlen unter einander, zieht einen Strich, und rechnet folgendergestalt:

43785
9

394065

Zuerst multiplicirt man die 5 Einer in 9. Dieses Product ist nach dem Einmaleins 45, nämlich Einer, d. i. 4 Zehner und 5 Einer. Die 5 Einer setzt man unter den Strich an die Stelle der Einer, und behält die vier Zehner in Gedanken, um sie zu der folgenden Classe zählen zu können. Hierauf multiplicirt man den zweyten Theil, acht Zehner durch 9. Das Product aus 8 in 9 ist nach dem Einmaleins zwey und siebenzig, und muß hier Zehner bedeuten, weil man eigentlich acht Zehner neunmal genommen hat. Zu diesen zwey und siebenzig Zehnern setzt man die vorigen vier Zehner; wodurch sechs und siebenzig Zehner entstehen, d. i. sieben Hunderte und sechs Zehner. Nachdem man also diese sechs Zehner

unter den Strich an den gehörigen Ort gesetzt, und die sieben Hunderte sich gemerkt hat, multiplicirt man die dritte Zifer der obern Zahl, nämlich die Sieben, welche Hunderte bedeutet. Sieben Hunderte neunmal genommen machen 63 Hunderte, und mit den vorigen 7 Hunderten 70 Hunderte oder 7 Tausende, ohne einen Hunderter. An die Stelle der Hunderte kömmt also Null. Die vierte Zifer des Multiplicandi ist 3, welche Tausende bedeutet, und diese 9 mal genommen, machen 27 Tausende, wozu noch die vorigen sieben Tausende addirt werden müssen, wodurch vier und dreyßig Tausende, d. i. drey Zehntausende und vier Tausende entstehen. Die vier Tausende kommen also in die vierte Stelle des Products, und die 3^{IV} werden im Sinne behalten. Vier Zehntausende neunmal genommen, machen sechs und dreyßig Zehntausende, und mit den vorigen dreyen neun und dreyßig Zehntausende, die also als die letzte Zahl des Products ganz ausgeschrieben werden. Da nun die Zahl 394065 das Neunfache von allen Theilen der gegebenen Zahl 43785 enthält; so muß sie nothwendig das Neunfache von der ganzen Zahl, das heißt, das Product aus 43785 in 9 seyn.

§. 34.

Sind beyde Factores zusammengesetzte Zahlen, so multiplicirt man jede Zifer des Multiplicandi mit jeder Zifer des Multiplicators, und schreibt die Producte so unter einander, daß die gleichartigen Theile, welche man hernach addiren muß, in einer Reihe zu stehen kommen. Z. E. es sey die Zahl 25438 durch 643 zu multipliciren.

25438

25438
643

76314
101752
152628

16356634

Man wird leicht einsehen, wenn man sich an den vorhin angeführten Grundsatz (§. 10.) erinnert, daß man die Zahl 25438 durch 643 multipliciret, sobald man sie sechs hundertmal, hernach vierzigmal und endlich viermal, oder zuerst viermal, alsdenn vierzigmal und endlich sechs hundertmal nimmt. Denn es gilt hier gleich viel, ob man mit den Hunderten oder mit den Einern anfängt; insgemein aber pflegt man das letzte zu thun. Multiplicirt man nun 25438 durch 3 nach den vorhin erklärten Regeln, so erhält man 76314 Einer, welche man unter den gezogenen Strich setzet. Auf eben die Art multiplicirt man die obere Zahl mit der zweyten Zifer des Multiplicators, nämlich mit 4, wodurch die Zahl 101752 entstehet. Weil aber diese zweyte Zahl des Multiplicators Zehner bedeutet, indem man hier eigentlich vier Zehner 25438 mal genommen hat; so muß auch das Product 101752 Zehner bedeuten; daher diese Zeile nicht unmittelbar unter die vorige gesetzt werden kann, sondern um eine Stelle eingerückt werden muß. Endlich nimmt man die letzte Zifer des Multiplicators 6, nnd verfährt damit wie vorhin; wodurch man das Product 152628 erhält, welches sich auf Hunderte beziehet, weil man hier eigentlich sechs Hunderte 25438 mal genommen hat; daher man es auch wieder unter die zweyte Zeile dergestalt schreibet, daß man die erste Zifer rechter Hand unter die

Hun-

Hunderte setzt. Die Summe aus diesen drey Zeilen 16356634 muß also nothwendig die Producte aus allen Theilen des Multiplicators in einen jeglichen Theil des Multiplicandi, und folglich das verlangte Product aus den beyden ganzen Zahlen in einander enthalten.

Hätte man nicht mit der ersten Zifer des Multiplicators, sondern mit der letzten, nämlich mit den 6 Hunderten den Anfang gemacht, so hätte man die folgenden Zeilen nicht einrücken, sondern immer um eine Stelle herausrücken, und sie also folgendergestalt schreiben müssen:

25438
643
152628
101752
76314
1635663 4

Denn die erste Zeile bedeutet Hunderte, die andre Zehner, und die dritte Einer.

§. 35.

Wenn sich Nullen bey einem Factor befinden, so übergeht man sie anfänglich, weil man sonst einige Zeilen mit lauter Nullen, die in der Addition nichts ändern würden, anfüllen müßte. Nur müssen die Producte an die gehörigen Stellen gesetzt, und wenn die Nullen rechter Hand bey einem Factor stehen, dem Producte wieder beygefügt werden, damit die übrigen Zifern ihren gehörigen Ort erhalten. Z. E.

54325

54325	38264
6002	53000
108650	114792
325950	191320
326058650	2027992000

Befinden sich sowohl bey dem Multiplicando als auch bey dem Multiplicator Nullen; so multiplicirt man nur die eigentlichen Zahlen, und hängt an das Product alle Nullen der beyden Factoren. Den Grund davon wird man leicht aus den vorhergehenden einsehen. Z. E.

42350000
23000
12705
8470
974050000000

§. 36.

Ausser der jetzt erklärten Art, die Zahlen zu multipliciren, wobey man das pythagorische Täfelchen nöthig hat, giebt es noch andre Arten, die das Einmaleins entbehrlich machen, dergleichen z. E. die Ludolphische ist, welche das Product durch blosses Addiren finden lehret. Wir wollen setzen, daß 24318 durch 5234 multiplicirt werden sollte. Man mache sich also durch Hülfe der Addition, wie bey der Verfertigung des pythagorischen Täfelchens gezeigt wurde, das vielfache von dem Multiplicando 24318, indem man nämlich zuerst das einfache zu sich selbst, um das zweyfache, und hernach dieses zweyfache wieder zu dem einfachen addirt, um das dreyfache zu erhalten, u. s. f. Im gegenwärtigen Falle, da die

gröste Zifer des Multiplicators 5 ist, hat man nicht nöthig, diese Addition bis zum neunfachen fortzusetzen, sondern kann bey dem fünffachen stehen bleiben. Man muß aber, um sich nicht zu irren, durch eine Zifer linker Hand bemerken, das wie vielfache des Multiplicandi jede Zeile vorstellt. Ist dieses nun geschehen, so besteht die ganze Multiplication in einem blossen Abschreiben. Nämlich der erste Theil des Multiplicators rechter Hand ist in dem gegenwärtigen Exempel 4; man sucht also das vierfache von dem Multiplicando in der aufgesetzten Tabelle, 97272, und schreibt es unter den Strich. Der zweyte Theil des Multiplicators ist 3 und bedeutet Zehner; man sucht daher in der Tabelle das dreyfache des Multiplicandi, 72954, und setzt es, weil es auch Zehner bedeuten muß, in die andre Zeile eine Stelle weiter zur Linken. Eben so verfährt man mit dem dritten und vierten Theile des Multiplicators, indem man das zweyfache und fünffache aus der Tabelle abschreibt, und jenes unter die Hunderte, dieses aber unter die Tausende setzet, weil die 2 Hunderte und die 5 Tausende bedeutet. Endlich werden, wie vorhin, diese einzelnen Producte zusammen addirt, wodurch man das ganze Product erhält, das eigentlich verlangt wurde.

	24318 der Multiplicandus.	24318
2)	48636 das 2fache desselben.	5234
3)	72954 das 3fache.	97272
4)	97272 das 4fache.	72954
5)	121590 das 5fache.	48636
		121590
		127280412

Auf

Auf eine ähnliche Art multiplicirt man auch vermittelst der so genannten Nepperischen Stäbe, welche diesen Namen von ihrem Erfinder, dem Baron Nepper aus Schottland, erhalten haben. Bey diesen Stäben erspart man die Mühe, das vielfache des Multiplicandi durch die Addition zu suchen; weil diese Stäbe schon so eingerichtet sind, daß man unter jeder Zahl, die oben steht, das zweyfache bis zum neunfachen nach der Reihe findet. Man braucht also nur die Stäbchen so zu legen, daß die obern Zahlen den Multiplicandum vorstellen, und hernach wie bey der vorigen Art zu verfahren.

§. 37.

Die Multiplication der benannten Zahlen wird sich nunmehr ohne grosse Anweisung verstehen lassen; ich will sie daher blos durch ein einziges Beyspiel erläutern. Es sey nämlich 238 Rthlr. 8 Gr. 4 Pf. durch 6 zu multipliciren. Dieses könnte nun auf zweyerley Art geschehen; erstlich, wenn man die 238 Rthlr. zu Groschen machte, und hierzu die 8 gr. addirte, ferner, diese Groschen wieder in Pfennige verwandelte, und hierzu die 4 pf. addirte; denn so dürfte man hernach diese Summe Pfennige nur 6 mal nehmen, so hätte man die ganze Zahl 238 Rthlr 8 gr. 4. pf. durch 6 multiplicirt. Allein jedermann wird die Weitläuftigkeit dieser Methode leicht einsehen. Denn da man auf diese Art auch das Product in lauter Pfennigen erhielte, und man im gemeinen Leben eine so ansehnliche Summe Geld nicht in Pfennigen auszudrücken pflegt; so würde man diese Pfennige wieder in Groschen, und die Groschen in Thaler verwandeln müssen. Es ist also besser, wenn man sich

einer

einer andern Methode bedient, und jeglichen Theil des Multiplicandi einzeln durch den Multiplicator vervielfältiget. Nämlich in diesem Falle darf man nur erst 4 Pf. sechsmal nehmen, wodurch man 24 Pf. d. i. 2 Gr. ohne einen Pfennig erhält, alsdenn 8 Gr. sechsmal, welches 48 Gr. und mit den vorigen 2 Gr. 50 Gr. oder 2 Rthlr. 2 Gr. ausmacht. Die 2 Gr. setzt man also in die Stelle der Groschen, multiplicirt endlich 238 Rthlr. wieder durch 6, und addirt hierzu die vorigen 2 Rthlr. so erhält man das ganze Product. Man pflegt aber, wenn man einige Uebung hat, der Kürze wegen, den Multiplitor nur einmal zu schreiben, und die Zahlen, welche zur folgenden Classe zu rechnen sind, im Sinne zu behalten, wie auch hier geschehen ist.

238 rthlr. 8 gr. 4 pf.

(6

1430 — 2 — ' —

Noch leichter ist die Multiplication, wenn Buchstaben durch Bubstaben multiplicirt werden sollen. Blosse Buchstaben setzt man nur neben einander, um das Product anzuzeigen; und stehen neben den Buchstaben noch Zifern, so multiplicirt man sowohl die Zifern, als auch die Buchstaben in einander, und addirt hernach diejenigen einzelnen Producte, die durch einerley Buchstaben ausgedrückt sind, zu einander, und die übrigen verbindet man durch das Zeichen Plus. Z. E.

$$\begin{array}{r} 3a + 2b \\ 2a + b \\ \hline 3ab + 2bb \\ 6aa + 4ab \\ \hline 6aa + 7ab + 2bb \end{array}$$

§. 38.

§. 38.

Die Division, mit welcher wir uns nunmehr beschäftigen wollen, wird zwar mit Recht eine wiederhohlte Subtraction genannt, wie schon aus der oben angeführten Erklärung (§. 8.) offenbar ist. Wenn man aber bey größern Zahlen durch ein wiederhohltes Subtrahiren die Division verrichten wollte, so würde dieses eine eben so weitläuftige Arbeit seyn, als wenn man große Zahlen mit einander durch eine wiederhohlte Addition multipliciren wollte; daher man auf eine bequemere Art bedacht gewesen ist, den Quotienten zu entdecken. Nämlich die Zahlen, von welchen man den Quotienten wissen will, stehen entweder beyde in dem Einmaleins oder nicht. Ist das erste, so wird man durch dessen Hülfe den Quotienten leicht finden können. Z. E. Es sey 30 durch 6 zu dividiren. Könnte ich mir 30 als ein Product von zwey Factoren vorstellen, wovon der Divisor der eine Factor wäre; so müßte der andre Factor der Quotient seyn. (§. 19.) Wenn ich nun den Dividendum 30 im pythagorischen Täfelchen (§. 32) aufsuche, so finde ich, daß er aus der Multiplication der Zahl 6 in die Zahl 5 entstanden ist, und also muß 5 nothwendig der gesuchte Quotient seyn; denn

$$\frac{30}{6} = \frac{5 \times 6}{6} = 5 \text{ (§. 19).}$$

Insgemein pflegt man den Quotienten durch Rathen zu suchen, und ihn auf diese Art zu prüfen, daß man ihn in den Divisor multiplicirt; denn gleicht dieses Product dem Dividendo, so hat man den wahren Quotienten getroffen. Ist z. E. 6 in 30 fünfmal enthalten, oder läßt sich 6 aus 30 fünfmal wegnehmen, so muß die

Zahl 6 fünfmal gesetzt die Zahl 30 ausmachen, und daher überhaupt ein Product aus dem Divisor und dem Quotienten so groß seyn, als der Dividendus.

§. 39.

Man kann sich die Division noch auf eine andre Art vorstellen, die in manchen Fällen ihren grossen Nutzen hat, vornehmlich wenn eine kleinere Zahl durch eine grössere dividirt werden soll. Man erwäge nur das vorige Beyspiel $\frac{30}{6} = 5$ und folglich $30 = 5 \times 6 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$; woraus man sieht, daß man den Quotienten 5 auch finden könnte, wenn man den Dividendum 30 in 6 gleiche Theile zergliederte, und einen solchen Theil nähme. Daher kann man sagen: Dividiren überhaupt heißt so viel, als eine von zwey gegebenen Zahlen in so viel gleiche Theile zergliedern, als die andre Einheiten hat, und einen solchen Theil nehmen.

§. 40.

Bey der Division der grössern Zahlen ist eben das zu beobachten, was bey den vorhergehenden Rechnungsarten mit zusammengesetzten Zahlen angeführt worden ist, nämlich, daß man ihre Theile nach und nach dividiret, anstatt das Ganze auf einmal zu dividiren. Wir wollen uns gleich die Sache in einem Beyspiele vorstellen, und die Zahl 20272 durch 8 dividiren, welches folgendergestalt geschehen könnte:

8)

8) 20272 | 2534
16
42
40
27
24
32
32
0

Nämlich man setzt den Divisor linker Hand, und sondert ihn durch ein Häkchen vom Dividendo ab; rechter Hand schreibt man hinter einen Strich den Quotienten. Wenn man nun untersucht, wie oft die Zahl 8 in jedem Theile der Zahl 20272 steckt; so erfährt man dadurch, wie oft sie in der ganzen Zahl enthalten ist. Die Zahl 20272 besteht aus 20 Tausenden, 2 Hunderten, 7 Zehnern und 2 Einern. Man dividire also zuerst den Theil 20 durch 8, wodurch man zum Quotienten 2 erhält, nämlich Tausende, weil man hier den achten Theil von 20 Tausenden nimmt. Diesen gefundenen Quotienten 2 multiplicirt man nunmehr durch den Divisor, um ihn zu prüfen. Das Product ist 16, woraus man sehen kann, daß man nicht alle 20 Tausende, sondern nur eigentlich 16 davon dividirt habe. Man zieht daher diese 16 von den 20 Tausenden ab, um zu sehen, wie viel noch nicht dividirt worden, und setzt zu den übrigen 4 Tausenden die folgende Zifer des Dividendi, nämlich 2 Hunderte, wodurch man zusammen 42 Hunderte erhält. Diese 42 Hunderte dividirt man aufs neue durch 8, welches zum Quotienten 5 Hun-

derte giebt. Das Product aus 5 in 8 ist 40; dieses zieht man von den 42 Hunderten ab, und setzt zu den übrig gebliebenen 2 Hunderten, die man noch nicht dividirt hat, den folgenden Theil, nämlich 7 Zehner. Diese 27 Zehner durch 8 dividirt geben 3 Zehner, welches die dritte Zifer des Quotienten ist. Das Product aber 8 × 3 ist 24, woraus man wieder sieht, daß nicht alle 27 Zehner, sondern nur 24 davon völlig dividirt worden sind; diese 24 also von den 27 Zehnern subtrahirt, lassen drey undividirte Zehner, die man zu dem letzten Theile des Dividendi, nämlich zu den 2 Einern setzet, und endlich auch diese 32 Einer durch 8 dividirt, wodurch man den letzten Theil des Quotienten, nämlich 4 Einer erhält. Und weil 8 mal 4 die Zahl 32 völlig ausmacht, so ist der ganze Quotient: 2534. Will man die Probe machen, so multiplicire man den gefundenen Quotienten durch den Divisor, und vergleiche das Product mit dem Dividendo (§. 38.)

2534
8

20272

§. 41.

Hätte man die Zahl 20273 durch 8 dividiren sollen, so würde auch bey der Division des letzten Theils, noch ein undividirter Einer übrig geblieben seyn; der völlige Quotient wäre also nicht blos 2534, sondern noch über dieses der 8te Theil von einem Einer, den man also zu dem vorigen Quotienten hinzusetzen muß. Z. E.

8) 20273 | 2534 1/8
16

42
40

27
24

33
32

1

Will man nun in diesem Falle den ganzen Quotienten prüfen, so muß zu dem Producte aus 2534 in 8 der Ueberrest 1 addirt werden.

2534
8

20273

§. 42.

Manche setzen den Divisor unter jeglichen Theil des Dividendi, den sie dividiren, behalten die Producte aus den Theilen des Quotienten in den Divisor im Sinne, und setzen die Ueberreste über den Dividendum. Die Verwirrung zu vermeiden, werden alsdenn diejenigen Zifern, die schon dividirt worden sind, ausgestrichen. Nach dieser Art würde voriges Exempel also gerechnet werden:

4 3 (1 |
2 ø 2 7 3 | 2534 1/8
ø ø ø ø |

Andre hingegen schreiben den Divisor nur einmal linker Hand, wie ich vorhin gethan habe, und setzen die Ueberreste unter die Theile des Dividendi. Z. E.

8) 2 ø 2 # 3 | 2534 r/8
   4 3 (1 |

Diese beyden Arten sind zwar kürzer, als diejenige, die §. 40. erklärt worden ist; allein da man nicht alle Zahlen ausschreibt, so kann man sich viel leichter verrechnen, und bey dem Durchsehen eines Exempels den Fehler auch nicht so bequem entdecken.

§. 43.

Wenn nicht nur der Dividendus, sondern auch der Divisor eine zusammengesetzte Zahl ist, so bedient man sich folgender Muthmassung, um den Quotienten zu finden: vielleicht wird der ganze Divisor in dem ganzen Theile des Dividendi so oft stecken, als die erste Zifer des Divisors in der ersten oder in den ersten beyden Zifern der zu dividirenden Zahl. Diese Muthmassung trügt zwar bisweilen; allein diesen Irrthum kann man gar leicht verbessern, so bald man den gefundenen Quotienten in den Divisor multipliciret, und dieses Product von dem dividirten Theile abziehet. Denn ist dieses Product grösser, als der dividirte Theil, so ist auch der Quotient zu groß angenommen; oder ist nach geschehener Subtraction dieses Products von dem dividirten Theile, der Ueberrest grösser, als der Divisor, so ist der Quotient zu klein, und muß geändert werden. Uebrigens geschieht die ganze Division auch in diesem Falle,

wie

wie vorhin, welches man aus folgendem Beyspiele sehen kann:

54) 23'3550 | 4325
216

175
162

13'5
108

270
270

0

Probe

4325
54

17300
21625

233550

Nämlich weil eine oder zwey Zifern des Dividendi zu klein sind, als daß man sie durch 54 dividiren könnte, so nimmt man gleich die ersten drey 233 auf einmal, und urtheilt also: vielleicht ist der ganze Divisor 54 in der Zahl 233 so oft enthalten, als 5 in 23. Nun steckt 5 in 23 ohngefehr 4 mal. Man setzt also 4 in die Stelle des Quotienten, multipliciret diese Zahl in den Divisor 54 und zieht das Product 216 von 233 ab. Weil dieses Product kleiner als 233 und der Ueberrest 17 kleiner als der Divisor 54 ist, so muß 4 der wahre Quotient seyn. Zu dem Ueberrest 17 setzt man die folgende Zifer 5, und fährt auf eben die Art mit der Division so lange fort, bis man alle Theile des Quotienten gefunden hat.

§. 44.

Will man den Quotienten ohne Einmaleins und ohne Rathen finden, so mache man es mit dem Divisor, wie man es mit dem Multiplicando machet, (§. 36.) wenn man ohne Einmaleins multipliciret.

Nämlich man suche durch Hülfe der Addition das zweyfache, dreyfache, vierfache, fünffache, sechsfache, siebenfache, achtfache, und neunfache des Divisors, und vergleiche diese Vielfache desselben mit den einzelnen Theilen des Dividendi, so wird man den Quotienten mit leichter Mühe finden können. Z. E. es sey 24572237348 durch 4523 zu dividiren:

1)	4523)	24'57'2373'48 |	543276
2)	9046	22615	
3)	13569	195'73	
4)	18092	18092	
5)	22615	148'1'7	
6)	27138	13569	
7)	31661	1248'3	
8)	36184	9046	
9)	40707	34374	
		31661	
		27138	
		27138	
		0	

Wenn man nun, wie hier geschehen ist, von dem Divisor 4523 durch die Addition das zweyfache, dreyfache u. s. w. bis zu dem neunfachen gesucht hat; so vergleicht man die ersten 5 Zifern des Dividendi, weil die erstern viere kleiner sind, als der Divisor, mit den vielfachen desselben, und nimmt die nächst kleinere Zahl, wenn man den zu dividirenden Theil nicht selbst darunter antrift. Das fünffache 22615 kömmt der Zahl 24572, die jetzt dividirt werden soll, am

nächs-

nächsten; man setzt also dieses fünffache unter dieselbe, und die Zahl 5 an die Stelle des Quotienten. Nachdem man nun zu dem Ueberreste 1957 die folgende Zifer 3 herunter gesetzet hat, so vergleicht man aufs neue die jetzt zu dividirende Zahl 19573 mit den vielfachen des Divisors, dessen vierfaches nämlich 18092 ihr am nächsten kömmt. Der zweyte Theil des Quotienten ist also 4. Und auf diese Art fährt man so lange fort, bis man alle Theile des Quotienten entdeckt hat. Dividirt man mit den Nepperischen Stäben, welches auf eine ähnliche Weise geschieht, so legt man die Stäbe dergestalt, daß die obern Zahlen den Divisor vorstellen; wodurch man mit noch geringerer Mühe das Vielfache des Divisors erhält.

§. 45.

Sollen benannte Zahlen, z. E. 2453 Rthlr. 13 Gr. 4 Pf. durch 32, dividirt werden, so kann man, wenn sie aus verschiednen Einheiten bestehen, alles auf einerley Einheit, als hier z. E. die Thaler und Groschen auf Pfennige reduciren, und alsdenn die Division vornehmen, welches aber einige Weitläuftigkeit verursacht, und nicht nöthig ist, wofern nicht auch der Divisor aus Zahlen von verschiednen Einheiten besteht. Kürzer kann man also das gegenwärtige Exempel rechnen, wenn man zuerst die Thaler dividirt, und wofern bey der Division einige Thaler übrig bleiben, dieselben in Groschen verwandelt, und die Groschen des Dividendi hinzusetzt, diese Summe Groschen aufs neue dividirt, die übrig gebliebnen Groschen zu Pfennigen macht, hierzu die Pfennige des Dividendi addirt, und alsdenn aber-

mals die Division verrichtet, wie man aus folgender Rechnung sehen kann.

32) 2453 | Rthlr. 13 Gr. 4 Pf.
224 | 76 Rthlr.

213
192

21 Rthlr Rest.
24

84
42

504 Gr. = 21 Rthlr.
13

32) 517 | 16 Gr.
32

197
192

5 Gr. Rest.
12

60 Pf. = 5 Gr.
4

32) 64 | 2 Pf.
64

0

Noch kürzer könnte man in diesem und in ähnlichen Fällen, wo sich der Divisor in einfache Factores zergliedern läßt, den Quotienten auf folgenge Art finden. Die Zahl 32 kann als ein Product aus 8 in 4 angesehen werden. Mit 32 dividiren heißt so viel, als den 32ten Theil einer Zahl suchen. (§. 39.) Weil nun 8 mal 4 die Zahl 32 ausmacht, so muß es einerley seyn, ob man die zu dividirende Zahl gleich in

32 Theile theilet, und einen solchen Theil nimmt, oder ob man erst den 8ten und von dem 8ten hernach den 4ten Theil suchet. Der 4te Theil von dem 8ten Theile ist ohne Zweifel so groß, als der 32te Theil. Man dividire also die gegebene Zahl zuerst durch 8, und diesen gefundenen Quotienten wieder durch 4, so erhält man den eigentlichen Quotienten, der verlangt wird. Weil man bey einer kleinen Uebung die Producte aus den einzelnen Theilen des Quotienten in den Divisor, wenn dieser eine einfache Zahl ist, leicht im Sinne behalten kann, so pflegt man nur gemeiniglich den Quotienten hinzuschreiben, und zwar gleich unter den Strich, auf folgende Art:

2453 Rthlr. 13 Gr. 4 Pf.

8) 306 — 16 — 8 —

4) 76 Rthlr. 16 Gr. 2 Pf.

Nämlich der Quotient aus 2453 Rthlr. 13 Gr. 4 Pf. dividirt durch 8, ist 306 Rthlr. 16 Gr. 8 Pf. und der Quotient aus 306 Rthlr. 16 Gr. 8 Pf. dividirt durch 4, ist 76 Rthlr. 16 Gr. 2 Pf. welches also der 32te Theil von der obigen Zahl seyn muß.

Weil aber bey den durch Buchstaben ausgedrückten Grössen, keine solche Verwandlung der einen in die andre statt findet, so dividirt man nur, was sich dividiren läßt, und zeigt das übrige von dem Quotienten blos durch das Zeichen der Division an. Z. E. wenn die zusammengesetzte Grösse, $4a + 3b + 15c$ durch 5 dividirt werden sollte, so würde der Quotient seyn:

$$\frac{4a}{5} + \frac{3b}{5} + 3c.$$

Viertes Capitel.

Von den vier Rechnungsarten in gebrochnen Zahlen.

§. 46.

Ein Bruch oder eine gebrochene Zahl entsteht, wenn man die Einheit in lauter gleiche Theile zergliedert, und einen oder etliche solcher Theile nimmt. Will man also einen deutlichen Begriff von einem Bruche haben; so muß man zweyerley wissen: nämlich in wie viel gleiche Theile das Ganze oder die Einheit zergliedert worden sey, und wie viel solcher Theile der Bruch enthalte. Man pflegt daher die Brüche durch 2 Zahlen auszudrücken, und sie wie die Quotienten zu schreiben, weil hier allemal eine Theilung verstanden wird. Diejenige Zahl, welche die Eintheilung der Einheit anzeigt, wird der Nenner (denominator) genannt, und unter den Strich gesetzt, die andre aber, aus welcher man sieht, wie viel der Bruch Theile von der Einheit enthalte, heißt der Zähler des Bruchs, (numerator) und wird über den Strich gesetzt. Der Ausdruck $\frac{4}{5}$ d. i. vier Fünftel, zeigt also an, daß man die Einheit in 5 gleiche Theile zergliedern, und vier solcher Theile nehmen soll; wodurch man eben so viel erhält, als wenn man die Zahl 4 durch die Zahl 5 dividirt. In diesem Falle wird der Zähler der Dividendus und der Nenner der Divisor. Es lassen sich aber die Brüche völlig als ganze Zahlen betrachten, wenn man nämlich nicht die ganze Einheit, sondern nur einen Theil derselbe-

selben zur eigentlichen Einheit annimmt. Denn so muß $\frac{4}{5}$ nothwendig die ganze Zahl 4 seyn, wenn man den fünften Theil der Einheit zur Einheit erwählet.

§. 47.

Man kann einen Theil der Einheit so vielmal nehmen, daß endlich eine Zahl daraus wird, welche eben so groß, oder noch grösser ist, als die Einheit selbst. Brüche, welche auf diese Art entstanden sind, heissen **uneigentliche, unächte oder Bastard-Brüche** (fractiones spuriae) z. E. $\frac{5}{5}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{10}{5}$; jene hingegen, welche weniger enthalten, als die Einheit, z. E. $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, wahre oder ächte Brüche (fractiones verae.) Ist der Zähler dem Renner gleich, z. E. $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{9}{9}$, so muß der Bruch die Einheit selbst vorstellen, und folglich müssen alle solche Brüche, deren Zähler und Renner gleich sind, einander selbst gleichen $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = \frac{d}{d}$ &c. Will man wissen, wie viel ganze Einheiten ein uneigentlicher Bruch enthält, so darf man nur den Zähler mit dem Renner dividiren. Also ist $\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$ ferner $\frac{10}{5} = 2$. Woraus man zugleich sehen kann, daß sich jede ganze Zahl in einen uneigentlichen Bruch von jedem beliebigen Renner verwandeln läßt; denn man darf nur die ganze Zahl in den Renner multipliciren, und das daraus entstehende Product als den Zähler betrachten. Will man z. E. die Zahl 6 in einen Bruch verwandeln, dessen Renner 8 seyn soll, so multiplicire man 6 durch 8; das Product 6×8 oder 48 wird also der verlangte Zähler und folglich $\frac{48}{8}$ so viel

viel als 6 Ganze seyn. Denn aus §. 19. ist klar, daß $\frac{6 \times 8}{8} = 6$.

§. 48.

Weil der Zähler eines Bruchs eigentlich die Menge der Theile, und der Nenner blos die Eintheilung der Einheit anzeigt, (§. 46.) so ist klar, daß der Bruch mit der Vermehrung des Zählers wachsen, und hingegen mit der Verminderung desselben abnehmen muß, wofern man den Nenner unverändert läßt; weil man im ersten Falle mehr Theile, und im andern Falle weniger Theile nimmt, ohne die Eintheilung der Einheit selbst oder die Grösse der Theile zu ändern. So wird z. E. niemand daran zweifeln, daß der Bruch $\frac{8}{9}$, grösser seyn muß, als der Bruch $\frac{7}{9}$, weil der Zähler des erstern grösser ist, als der Zähler des andern, und beyde doch einerley Nenner haben. Verdoppelt man also den Zähler, ohne den Nenner im geringsten zu verändern, so wird auch der Bruch noch einmal so groß werden; nimmt man das dreyfache von dem Zähler, so wird man einen dreymal so grossen Bruch u. s. f. bekommen. Woraus sich auch leicht einsehen läßt, daß wieder umgewendet der Bruch so vielmal kleiner werden müsse, so vielmal der Zähler bey unverändertem Nenner kleiner geworden ist. Hingegen wird sich die Sache ganz anders verhalten, wenn man mit dem Nenner eines Bruchs eine Veränderung vornimmt, und den Zähler unverändert läßt. Denn in diesem Falle muß nothwendig mit der Vermehrung des Nenners die Verminderung des Bruchs, und mit der Verminderung des

Nen-

Nenners die Vermehrung des Bruchs verbunden seyn; weil die Theile der Einheit desto kleiner werden, je grösser die Anzahl derselben gemacht wird. So muß z. E. der Bruch $\frac{5}{6}$ grösser seyn, als der Bruch $\frac{5}{12}$, weil der Nenner 6 kleiner ist als der Nenner 12. Denn wird die Einheit nur in 6 gleiche Theile zergliedert, so müssen die Theile ohne Zweifel grösser seyn, als wenn dieselbe in 12 Theile getheilt wird. Hieraus folgt also, daß man einen Bruch auf zweyerley Art vermehren und vermindern könne. Nämlich er läßt sich vermehren, wenn man entweder den Zähler vermehrt, ohne den Nenner zu verändern, oder wenn man den Nenner vermindert, und den Zähler unverändert läßt. Und so läßt er sich vermindern, wenn man entweder den Zähler kleiner macht, und den Nenner behält, oder den Nenner vergrössert und den Zähler unverändert läßt.

§. 49.

Wer das vorhergehende richtig verstanden hat, wird nunmehr ohne fernern Beweis einsehen, daß der Werth eines Bruchs keine Veränderung leidet, wenn man seinen Zähler und Nenner durch einerley Zahl multiplicirt oder dividirt. So muß z. E. $\frac{3}{4}$ eben so viel seyn, als $\frac{3 \times 5}{4 \times 5}$ d. i. $\frac{15}{20}$. Denn indem ich den Zähler durch 5 vermehre, so mache ich den Bruch 5 mal grösser, und indem ich auch den Nenner durch 5 multiplicire, so mache ich ihn wieder fünfmal kleiner, und folglich müssen die beyden Veränderungen einander aufheben, und den Werth des Bruchs unver-

verändert lassen. Aus eben der Ursache muß auch $\frac{8:4}{12:4}$ so viel seyn, als $\frac{2}{3}$ d. i. —. Denn durch die Division des Zählers mit 4 wird jener Bruch 4 mal kleiner, und durch die Division des Nenners mit 4 wieder viermal grösser, und folglich muß hier wieder durch die letzte Vermehrung die erste Verminderung aufgehoben werden.

§. 50.

Aus den jetzt angeführten Sätzen wird sich also die Art und Weise leicht einsehen lassen, Brüche von verschiednen Nennern in andre gleichgeltende zu verwandeln, die einerley Nenner haben, und ferner aus einem gegebenen Bruche einen andern von eben dem Werth zu machen, dessen Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind. Was die erste Aufgabe betrift, Brüche von verschiedenen Nennern unter einerley Benennung zu bringen; so multiplicire man, wenn nur zwey Brüche gegeben sind, den Zähler und Nenner eines jeden in den Nenner des andern, und wenn deren mehr gegeben sind, den Zähler und Nenner eines jeden durch ein Product aus den Nennern der übrigen Brüche. Z. E. verlangt man statt $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{8}$ zwey andre gleichgeltende Brüche von einerley Nenner, so multiplicire man Zähler und Nenner von $\frac{5}{9}$ durch 8, als den Nenner des andern Bruchs, und Zähler und Nenner von $\frac{7}{8}$ durch 9, als den Nenner des ersten Bruchs, auf folgende Art:

8	
5	40
9	72

9	
7	63
8	72

Der

Der Bruch $\frac{40}{72}$ muß so groß seyn, als der Bruch $\frac{5}{9}$, und $\frac{105}{72}$ so groß als $\frac{7}{8}$. (§. 49.). Läßt sich der eine Nenner durch den andern ohne Rest dividiren, so braucht man nur einen Bruch zu verwandeln. Z. E. wären die beyden Brüche $\frac{7}{12}$ und $\frac{13}{48}$ gegeben, so könnte man $\frac{7}{12}$ gar leicht in einen Bruch verwandeln, der noch eben denselben Werth und 48 zum Nenner hätte, wenn man Zähler und Nenner mit dem Quotienten 4, welchen man durch die Division des Nenners 48 mit dem Nenner 12 erhält, multiplicirte.

$$\begin{array}{c|c} & \overset{(4}{} \\ 7 & 28 \\ \hline 12 & 48 \end{array}$$

Wären mehr als zwey Brüche gegeben, z. E: $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}$, so wäre die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{c|c} & \overset{(30}{} \\ \frac{1}{4} & 30 \\ \hline & 120 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \overset{(40}{} \\ \frac{2}{3} & 80 \\ \hline & 120 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \overset{(24}{} \\ \frac{4}{5} & 96 \\ \hline & 120 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \overset{(60}{} \\ \frac{1}{2} & 60 \\ \hline & 120 \end{array}$$

Nämlich 30, womit der Zähler und Nenner des ersten Bruchs multiplicirt wird, ist ein Product aus den Nennern der 3 übrigen Brüche $3 \times 5 \times 2$; eben so $40 = 4 \times 5 \times 2$; $24 = 4 \times 3 \times 2$ und $60 = 4 \times 3 \times 5$.

§. 51.

Die andre Aufgabe, einen Bruch, dessen Zähler und Nenner grosse Zahlen sind, in einen andern

gleichgeltenden Bruch mit kleinern Zahlen zu verwandeln, welches man aufheben nennt, wird dadurch aufgelöset, daß man eine Zahl sucht, womit sich der Zähler und Nenner völlig dividiren läßt. Z. E. wäre der Bruch $\frac{48}{72}$ gegeben, so dividire man den Zähler und Nenner mit 24, weil sich beyde mit dieser Zahl völlig dividiren lassen; den $\frac{48}{24} = 2$, und $\frac{72}{24} = 3$. Der neue Bruch, welcher dadurch entstehet, nämlich $\frac{2}{3}$ muß so viel bedeuten, als $\frac{48}{72}$. (§. 49.) Läßt sich keine Zahl entdecken, womit man den Zähler und Nenner, ohne Rest zu behalten, dividiren kann; so ist es besser, den Bruch unverändert zu lassen, weil man sonst einen unbequemen Ausdruck erhält. Denn wollte man z. E. den Bruch $\frac{17}{48}$ mit 8 aufheben, so würde man $\frac{2}{6}\frac{1}{8}$ erhalten, wo der Zähler selbst wieder zum Theil aus einem Bruche bestünde.

§. 52.

Wenn sich Zähler und Nenner nicht mit einfachen Zahlen aufheben lassen, so ist es nicht allemal leicht, die zusammengesetzte Zahl, womit dieses möglich ist, durch Versuchen zu finden. Man pflegt sich daher in dergleichen Fällen folgender Methode zu bedienen, die sich am besten durch ein Beyspiel wird vortragen lassen. Es sey der Bruch $\frac{533}{697}$ aufzuheben. Man dividire den Nenner 697 durch den Zähler 533; bleibt kein Rest, so läßt sich der Bruch durch den Zähler selbst aufheben. Bleibt aber etwas übrig, so muß man den Divisor wiederum mit dem Reste dividiren, und diese Arbeit so lange fortsetzen, bis die

Divi-

Division aufgeht. Der letzte Divisor ist alsdenn diejenige Zahl, womit sich der Bruch aufheben läßt. Z. E.

533)697|1
533
164

Da hier 164 übrig bleibt, so ist klar, daß sich der Bruch durch 533 nicht wird aufheben lassen. Man dividire also nunmehr den vorigen Divisor 533 durch den Ueberrest 164; geht die Division völlig auf, so wird 164 die Zahl seyn, welche zum Aufheben geschickt ist.

164)533|3
492
41

Der Ueberrest 41 aber beweiset abermal, daß auch 164 die gesuchte Zahl nicht sey. Man muß also dieselbe wieder durch diesen Ueberrest 41 dividiren.

41)164|4
164
0

Da nun hier die Division völlig aufgeht, so ist dieses ein Beweis, daß sich nicht nur 164, sondern auch die vorhergehenden Zahlen 533 und 697 durch 41 ohne Ueberrest werden dividiren lassen.

41

533 | 13
697 | 17

Wenn die Division niemals aufgeht, als bis man Eins übrig behält, so läßt sich daraus urtheilen, daß es keine Zahl giebt, mit welcher Zähler und Nenner dividirt werden könnte.

§. 53.

Bey der Addition und Subtraction der Brüche werden wir nicht nöthig haben, uns lange aufzuhalten. Wenn man erwägt, daß nur gleichartige Zahlen zu einander gesetzt, oder von einander abgezogen werden können, (§. 4.) so wird man leicht einsehen, daß sich nur eigentlich Brüche von einerley Namen unmittelbar addiren oder subtrahiren lassen; weil bey den Brüchen nicht die ganze Einheit, sondern nur ein Theil derselben als die eigentliche Einheit zu betrachten ist (§. 46.), und daher solche Brüche, die verschiedene Nenner haben, als ungleichartige Zahlen anzusehen sind, indem alsdenn ein jeder Bruch sich auf einen andern Theil der Einheit bezieht. Brüche also, die verschiedne Nenner haben, müssen sowohl bey der Addition, als auch bey der Subtraction, zu einerley Benennung gebracht werden. Ist dieses geschehen, so findet man ihre Summe, wenn man blos ihre Zähler addirt und ihre Differenz, wenn man ihre Zähler von einander subtrahiret, ohne mit den Nennern die geringste Veränderung vorzunehmen; weil der Zähler allein die Menge der Theile, und der Nenner nur die Eintheilung der Einheit anzeigt. (§. 46.)

§. 54.

Die Summe von $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, würde sich also folgendergestalt finden lassen. Man verwandle zuerst diese drey Brüche in drey andre gleichgeltende von einer-

ley

ley Nennern, (§. 50.) so bekömmt man $\frac{48}{72}$, $\frac{60}{72}$, $\frac{54}{72}$, deren Summe $\frac{48 + 60 + 54}{72}$ d. i. $\frac{162}{72}$ oder $2\frac{18}{72}$ (§. 47.) oder $2\frac{1}{4}$ (§. 51.) seyn muß. Insgemein pflegt man diese Rechnung etwas anders auszudrücken. Man schreibt die Brüche, welche addirt werden sollen, unter einander; macht ein Product aus allen ihren Nennern, welches man den Hauptnenner heißt, den man oben an die Brüche setzt, weil man dessen bey der eigentlichen Addition nicht nöthig hat. Nun dividirt man diesen Hauptnenner durch den Nenner eines jeden Bruchs, und multiplicirt den Quotienten in den Zähler desselben, wodurch man den Zähler des neuen Bruchs erhält, der jenem gleich gilt, und zu seinem Nenner den Hauptnenner hat. Diese gefundenen Zähler setzt man unter einander, und addirt sie. Ist die Summe grösser, als der Hauptnenner, so dividirt man sie damit, um die Ganzen zu erfahren, die darinnen enthalten sind (§. 47.). Nach dieser Art würde das vorige Exempel also geschrieben werden:

72

2	48
3	
5	60
6	
3	54
4	

18

72)16'2 | 2 —

144 | 72

18

Nämlich 48 heißt so viel, als $\frac{48}{72} = \frac{2}{3}$. Der Zähler 48 wurde gefunden, indem man den Hauptnenner 72 durch den Nenner 3 des ersten Bruchs $\frac{2}{3}$ dividirte, und den Quotienten 24 durch den Zähler 2 wieder multiplicirte. Denn ist 24 der dritte Theil von 72, so muß $\frac{24}{72}$ so viel als $\frac{1}{3}$, und folglich zweymal so viel, oder $\frac{48}{72}$ so groß, als $\frac{2}{3}$ seyn, und s. f.

§. 55.

Sollte man Brüche, z. E. $\frac{8}{9}$ und $\frac{2}{5}$ von einander subtrahiren, so wäre nichts weiter zu thun, als sie auf vorige Art zu einerley Benennung zu bringen, ihre Zähler alsdenn von einander abzuziehen, und den gemeinschaftlichen Nenner zu behalten:

45

$\frac{8}{9}$ | 40

$\frac{2}{5}$ | 18

$\frac{22}{45}$

Die gesuchte Differenz muß also $\frac{22}{45}$ seyn: denn

$\frac{40}{45} = \frac{8}{9}$
$\frac{18}{45} = \frac{2}{5}$ } (§. 50.)

$\frac{40}{45} - \frac{18}{45} = \frac{8}{9} - \frac{2}{5}$ (§. 14.)

$\frac{40}{45} - \frac{18}{45} = \frac{22}{45}$ (§. 53.)

$\frac{8}{9} - \frac{2}{5} = \frac{22}{45}$ (§. 11.)

Die Probe wird wie bey der Subtraction der ganzen Zahlen gemacht. Die Summe aus dem kleinern Bruche

Bruche und der Differenz muß dem grössern Bruche gleich seyn.

§. 56.

Bey der Multiplication und Division der gebrochenen Zahlen, die für Anfänger gemeiniglich einige Schwierigkeit zu haben pflegen, wollen wir uns die verschiedenen Fälle, welche dabey vorkommen, besonders vorstellen, weil sich auf diese Art der Grund der Regeln am besten einsehen läßt. Nämlich erstlich bey der Multiplication ist entweder nur ein Factor eine gebrochne Zahl, oder alle beyde Factores. Ist nur ein Factor ein Bruch, so findet man das Product, wenn man den Zähler des Bruchs durch die ganze Zahl, welche den andern Factor vorstellt, multipliciret, und den Nenner unverändert läßt. Z. E.

$\frac{3}{4} \times 8$ ist so viel als $\frac{3 \times 8}{4}$ d. i. $\frac{24}{4}$ oder 6 Ganze.

Der Grund davon ist dieser. Wenn $\frac{3}{4}$ durch 8 multipliciret werden soll, so muß man $\frac{3}{4}$ achtmal zu sich selbst addiren, (§. 6.) das würde also die Summe $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ d. i. einen Bruch geben, dessen Zähler eine achtfache 3, und dessen Nenner der Nenner des Multiplicandi wäre; und folglich könnte man das Product aus $\frac{3}{4}$ in 8 auf einmal finden, wenn man den Zähler 8 mal grösser machte, und den Nenner unverändert ließe. Ist aber der Multiplicandus eine ganze Zahl, und der Multiplicator ein Bruch, z. E. $8 \times \frac{3}{4}$, so muß man sich die Sache also vorstellen. Wenn eine Zahl durch eine andre multiplicirt werden soll, so wird verlangt, man soll die erstre so vielmal nehmen, als

die andre Einheiten enthält (§. 6.). Ist nun diese andre Zahl, d. h. der Multiplicator, ein wahrer Bruch, so muß sie kleiner seyn, als die Einheit; und folglich kann sie nicht die Einheit selbst, sondern nur einen Theil der Einheit etlichemal enthalten. Eine Zahl also durch einen wahren Bruch multiplici=ren, heißt, von der Zahl eben so viel Theile nehmen, als der Bruch von der Einheit enthält; und folglich würde man 8 durch $\frac{3}{4}$ multipliciren, wenn man 8 in 4 gleiche Theile zergliederte, und 3 solcher Theile näh=me. Das erste könnte dadurch geschehen, wenn man 8 durch 4 dividirte (§. 39.), und das andre, wenn man diesen Quotienten durch 3 multiplicir=te. Das Product $8 \times \frac{3}{4}$ wäre also $\frac{8}{4} \times 3$, d. i. $\frac{8 \times 3}{4} = \frac{24}{4} = 6$; woraus offenbar ist, daß auch in diesem Falle an der Ordnung der Factoren nichts gelegen ist, und daß man einerley Producte erhält, man mag den Bruch oder die ganze Zahl als den Multiplicator betrachten. Ferner sieht man auch hieraus den Grund ein, warum durch die Multipli=cation einer Zahl mit einem wahren Bruche ein Pro=duct entsteht, welches kleiner ist, als der Multipli=candus. Denn die Multiplication mit einem wah=ren Bruche ist nicht eine blosse Multiplication, son=dern eine zusammengesetzte Rechnungsart, indem man mit dem Nenner dividirt, und nur mit dem Zähler multipliciret. Da nun bey den wahren Brüchen der Nenner grösser ist, als der Zähler, so wird allemal in dergleichen Fällen der Multiplicandus mehr ver=mindert als vermehrt; welches nothwendig eine klei=nere Zahl zum Producte geben muß.

Weil

Weil auch ferner mit der Verminderung des Nenners die Vermehrung eines Bruchs verbunden ist, wenn der Zähler unverändert gelassen wird (§. 48.); so kann man auch einen Bruch mit einer ganzen Zahl auf diese Art multipliciren, wenn man den Nenner durch die ganze Zahl dividirt; welches aber nur in denjenigen Fällen rathsam ist, wo sich der Nenner durch die ganze Zahl, womit der Bruch multiplicirt werden soll, ohne Rest theilen läßt. Z. E. $\frac{5}{12} \times 3$ wäre so viel, als $\frac{5}{12:3}$ d. i. $\frac{5}{4}$ oder $1\frac{1}{4}$. Denn indem man den Nenner viermal kleiner macht, muß der Bruch viermal grösser werden. Wollte man nach der vorigen Art rechnen, so würde man $\frac{15}{12}$ d. i. $1\frac{3}{12}$ erhalten, welches, wenn man den Bruch $\frac{3}{12}$ mit 3 aufhebt, ebenfalls $1\frac{1}{4}$ giebt.

§. 57.

Ehe wir sehen, wie Brüche durch Brüche multipliciret werden können, so wird es, der Deutlichkeit wegen, nöthig seyn, zuvor die Division der Brüche durch ganze Zahlen zu betrachten. Man kann aber Brüche durch ganze Zahlen auf zweyerley Art dividiren, nämlich entweder, wenn man den Zähler des Bruchs durch die ganze Zahl dividirt, und den Nenner unverändert läßt, oder wenn man den Nenner

durch die ganze Zahl multiplicirt, und den Zähler be-

hält. Z. E. $\frac{6}{7} : 3$ ist so viel als $\frac{6 : 3}{7}$ d. i. $\frac{2}{7}$ oder $\frac{6}{7 \times 3}$

d. i. $\frac{\overset{3}{\frown}}{\begin{array}{c|c} 6 & 2 \\ \hline 12 & 7 \end{array}}$ Denn $\frac{6}{7}$ mit 3 dividiren, heißt den drit-

ten Theil von $\frac{6}{7}$ suchen (§. 39.), welcher also nothwendig dreymal kleiner seyn muß, als $\frac{6}{7}$ selbst. Nun kann man einen Bruch sowohl durch die Verminderung des Zählers, als auch durch die Vermehrung des Nenners kleiner machen (§. 48.). Man muß daher einen dreymal kleinern Bruch als $\frac{6}{7}$, d. i. den Quotienten $\frac{6}{7} : 3$ erhalten, wenn man entweder den Zähler dreymal kleiner macht, d. h. durch 3 dividirt, und den Nenner behält, oder den Nenner dreymal grösser macht, d. h. durch 3 multiplicirt, und den Zähler unverändert läßt.

§. 58.

Nunmehr wird es keine Schwierigkeit haben, die Multiplication der Brüche durch Brüche einzusehen. Man multiplicirt sie, wenn man Zähler in Zähler, und Nenner in Nenner multiplicirt. Z. E.

$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ ist so viel, als $\frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ d. i. $\frac{15}{24}$. Denn vermöge dessen, was §. 56. erklärt worden ist, heißt $\frac{5}{6}$ durch $\frac{3}{4}$ multipliciren so viel, als $\frac{5}{6}$ durch 4 dividiren und durch 3 multipliciren. Wird nun $\frac{5}{6}$ durch 4 dividirt, so entsteht $\frac{5}{6 \times 4}$ (§. 57.) und wird $\frac{5}{6 \times 4}$ durch 3 multiplicirt, so erhält man $\frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ (§. 56.)

(§. 56.) d. i. einen Bruch, dessen Zähler ein Product aus den Zählern der beyden gegebenen Brüche, und dessen Nenner ein Product aus den Nennern eben derselben Brüche ist.

§. 59.

Sollen Brüche durch Brüche dividirt werden, so haben diese Brüche entweder einerley Nenner oder nicht. Haben sie einerley Nenner, z. E. $\frac{12}{13} : \frac{4}{13}$, so muß der Divisor in dem Dividendo so oft stecken, als der Zähler des Divisors in dem Zähler des Dividendi; weil in diesem Falle von einerley Eintheilung der Einheit die Rede ist, und die Brüche $\frac{12}{13}$ und $\frac{4}{13}$ als die ganzen Zahlen 12 und 4 angesehen werden können, deren Einheit der 13te Theil von der ganzen Einheit ist. (§. 46.) Der Quotient $\frac{12}{13} : \frac{4}{13}$ muß daher so viel seyn, als $\frac{12}{4}$ d. i. 3; welches man auch aus der Probe sehen kann, weil $\frac{4}{13}$ multiplicirt durch 3 dem Dividendo $\frac{12}{13}$ gleich ist. Haben die Brüche aber, die durch einander dividirt werden sollen, nicht einerley Nenner; so erhält man den Quotienten am geschwindesten, wenn man den Divisor umwendet, und alsdenn in den Dividendum multipliciret. Z. E. $\frac{7}{8} : \frac{3}{4}$ ist so viel, als $\frac{7}{8} \times \frac{3}{4}$ d. i. $\frac{28}{24}$ oder $1\frac{4}{24}$ oder $1\frac{1}{6}$. Denn wenn man die beyden Brüche zu einerley Benennung bringen wollte; so könnte man den Quotienten nach der vorigen Art erhalten, indem man blos die Zähler durch einander dividirte. Bringt man sie nun wirklich zu einerley Benennung, so erhält man statt $\frac{7}{8}$ den Bruch $\frac{7 \times 4}{8 \times 4}$ und statt $\frac{3}{4}$ den

Bruch

Bruch $\frac{3 \times 8}{4 \times 8}$ (§. 50.). Es muß also einerley seyn, ob man $\frac{7}{8}$ durch $\frac{3}{4}$ oder $\frac{7 \times 4}{8 \times 4}$ durch $\frac{3 \times 8}{4 \times 8}$ dividiret (§. 18.). Weil aber diese beyden Brüche einerley Nenner haben; so würde nach der vorigen Regel $\frac{7 \times 4}{3 \times 8}$ ihr Quotient seyn, den man also ohne diese Weitläuftigkeit erhalten kann, wenn man den umgewendeten Divisor in den Dividendum multipliciret.

§. 60.

Auf eben dieselbe Art verfährt man, wenn eine ganze Zahl durch einen Bruch z. E. 6 durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll. Der Bruch, als der Divisor, wird umgekehrt, und alsdenn in die ganze Zahl multipliciret; $6 : \frac{3}{4}$ muß eben so viel seyn, als $6 \times \frac{4}{3}$ d. i. $2\frac{4}{3}$ oder 8. Denn die ganze Zahl 6 läßt sich durch einen uneigentlichen Bruch ausdrücken (§. 47.), und mit $\frac{3}{4}$ zu einerley Benennung bringen. Weil nun der Bruch $\frac{6 \times 4}{4}$ dem Werthe nach der ganzen Zahl 6 gleicht; so ist der Quotient $6 : \frac{3}{4}$ (§. 18. 19.) so groß als der Quotient $\frac{6 \times 4}{4} : \frac{3}{4}$ d. i. weil beyde Brüche einerley Nenner haben, $\frac{6 \times 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

(§. 59.)

§. 61.

§. 61.

Wenn vermischte Zahlen durch einander dividirt werden sollen, z. E. $6\frac{2}{3} : 4\frac{1}{5}$, so muß man beyde in uneigentliche Brüche verwandeln, und hernach die Division nach den vorigen Regeln anstellen. $6\frac{2}{3}$ ist so viel als $\frac{20}{3}$ und $4\frac{1}{5}$ so viel als $\frac{21}{5}$; folglich

$$6\tfrac{2}{3} : 4\tfrac{1}{5} = \tfrac{20}{3} : \tfrac{21}{5} \text{ (§. 18.) d. i. } \tfrac{20}{3} \times \tfrac{5}{21} \text{ (§. 59.)}$$

oder $\frac{100}{63}$ (§. 58.) oder $1\frac{37}{63}$ (§. 47.) Hieraus wird man auch ohne fernere Anweisung einsehen, wie man vermischte Zahlen durch einander multipliciren könne

§. 62.

Diejenigen Brüche, deren Nenner 10 oder ein Product aus 10 in 10, z. E. $\frac{2}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{4}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, u. s. f. ist, verschaffen im Rechnen eine besondre Bequemlichkeit, weil sie nach eben dem Gesetze wachsen und abnehmen, wie die ganzen Zahlen, wofern man unsre gewöhnliche Art bis auf 10 zu zählen annimmt. Man heißt sie daher **Decimal-Brüche**, und schreibt sie gemeiniglich so, daß man ihre Nenner wegläßt, und den Zählern den Werth aus der Stelle giebt. In der ersten Stelle, von der linken gegen die rechte Hand zu gerechnet, stehen die Zehntheile, in der zweyten die Hunderttheile, in der dritten die Tausendtheile u. s. f. daß nämlich, wie bey den ganzen Zahlen, eine Stelle weiter gegen die linke Hand zu zehnmal mehr, und hingegen eine Stelle

weiter zur Rechten zehnmal weniger bedeutet, als die vorhergehende Stelle. Sind die Brüche mit ganzen Zahlen verbunden, so werden sie durch ein Comma oder durch einen Punct von einander abgesondert. Befinden sich aber keine ganzen Zahlen bey den Brüchen, so muß die Stelle der Ganzen mit Null angefüllt und das Comma nicht vergessen werden; weil man sonst nicht sehen könnte, ob die Zifern ganze Zahlen oder Brüche bedeuten sollten. Folgende vermischte Zahl $7 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000}$ würde man daher also schreiben 7,378; hingegen folgende Brüche ohne Ganze $\frac{9}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$ auf diese Art: 0,923. Fehlt irgendwo eine Classe, so muß man sie ebenfalls durch eine Null ausfüllen, damit die übrigen ihre eigentliche Stelle erhalten. Z. E. $12 + \frac{6}{100} + \frac{7}{10000}$ muß folgendergestalt ausgedrückt werden: 12,0607; weil es hier weder Zehntheile noch Tausendtheile giebt.

Unter den übrigen Brüchen haben noch diejenigen einen besondern Namen erhalten, deren Nenner 60 oder ein Product aus 60 in 60, d. i. 3600 oder 216000 u. s. f. ist. Man nennt sie nämlich Sexagesimalbrüche und bedient sich derselben vorzüglich bey der Eintheilung der Zeit. Dergleichen sind $\frac{7}{60}$, $\frac{13}{3600}$, $\frac{17}{216000}$ u. s. w. Ich werde mich aber jetzt, zur Vermeidung der Weitläuftigkeit, nur mit den Decimalbrüchen beschäftigen, ohne deren Kenntniß niemand in der Mathematik fortkommen kann.

§. 63.

Man kann die geschriebenen Decimal-Brüche auf zweyerley Art lesen, nämlich entweder, wenn man jede

jede Zifer als einen besondern Bruch ansieht, und den dazu gehörigen Nenner ausspricht, oder wenn man alle Zifern als den Zähler eines einzigen Bruchs betrachtet, dessen Nenner der Nenner von der letzten Zifer rechter Hand seyn muß. Z. E. 0,243 kann man aussprechen $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{100}$ und $\frac{3}{1000}$ oder $\frac{243}{1000}$. Denn

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{10} = \frac{200}{1000} \\ \frac{4}{100} = \frac{40}{1000} \\ \frac{3}{1000} = \frac{3}{1000} \end{array}\right\} \text{(§. 40.)}$$

$$\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{3}{1000} \text{ (§. 13.)}$$

$$\frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{3}{1000} = \frac{243}{1000} \text{ (§. 53.)}$$

$$\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{243}{1000} \text{ (§. 11.)}$$

§. 64.

Weil $\frac{10}{10000} = \frac{1}{1000}$ und $\frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ und $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ und $\frac{10}{10} = 1$ (§. 49. 51.) so ist klar, daß man Decimalbrüche wie ganze Zahlen addiren kann, wenn man sie nur dergestalt

weiter zur Rechten zehnmal weniger bedeutet, als die vorhergehende Stelle. Sind die Brüche mit ganzen Zahlen verbunden, so werden sie durch ein Comma oder durch einen Punct von einander abgesondert. Befinden sich aber keine ganzen Zahlen bey den Brüchen, so muß die Stelle der Ganzen mit Null angefüllt und das Comma nicht vergessen werden; weil man sonst nicht sehen könnte, ob die Zifern ganze Zahlen oder Brüche bedeuten sollten. Folgende vermischte Zahl $7 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000}$ würde man daher also schreiben 7, 378; hingegen folgende Brüche ohne Ganze $\frac{9}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$ auf diese Art: 0, 923. Fehlt irgendwo eine Classe, so muß man sie ebenfalls durch eine Null ausfüllen, damit die übrigen ihre eigentliche Stelle erhalten. Z. E. $12 + \frac{6}{100} + \frac{7}{10000}$ muß folgendergestalt ausgedrückt werden: 12, 0607; weil es hier weder Zehntheile noch Tausendtheile giebt.

Unter den übrigen Brüchen haben noch diejenigen einen besondern Namen erhalten, deren Nenner 60 oder ein Product aus 60 in 60, d. i. 3600 oder 216000 u. s. f. ist. Man nennt sie nämlich Sexagesimalbrüche und bedient sich derselben vorzüglich bey der Eintheilung der Zeit. Dergleichen sind $\frac{7}{60}$, $\frac{13}{3600}$, $\frac{17}{216000}$ u. s. w. Ich werde mich aber jetzt, zur Vermeidung der Weitläuftigkeit, nur mit den Decimalbrüchen beschäftigen, ohne deren Kenntniß niemand in der Mathematik fortkommen kann.

§. 63.

Man kann die geschriebenen Decimal-Brüche auf zweyerley Art lesen, nämlich entweder, wenn man jede

jede Zifer als einen besondern Bruch ansieht, und den dazu gehörigen Nenner ausspricht, oder wenn man alle Zifern als den Zähler eines einzigen Bruchs betrachtet, dessen Nenner der Nenner von der letzten Zifer rechter Hand seyn muß. Z. E. 0,243 kann man aussprechen $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{100}$ und $\frac{3}{1000}$ oder $\frac{243}{1000}$. Denn

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{10} = \frac{200}{1000} \\ \frac{4}{100} = \frac{40}{1000} \\ \frac{3}{1000} = \frac{3}{1000} \end{array}\right\} \text{(§. 40.)}$$

$$\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{3}{1000} \text{ (§. 13.)}$$

$$\frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{3}{1000} = \frac{243}{1000} \text{ (§. 53.)}$$

$$\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{243}{1000} \text{ (§. 11.)}$$

§. 64.

Weil $\frac{10}{10000} = \frac{1}{1000}$ und $\frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ und $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ und $\frac{10}{10} = 1$ (§. 49. 51.) so ist klar, daß man Decimalbrüche wie ganze Zahlen addiren kann, wenn man sie nur dergestalt

gestalt schreibet, daß Brüche von einerley Nenner unter einander kommen. Z. E.

15,3578	Ferner	423,37	
2,8371		8,9364	
0,4291		16,381	
0,0065		5824,74	
		0,43287	
18,6305		6273,86027	

Das Comma, welches die Brüche von den ganzen Zahlen unterscheidet, muß bey der Summe an eben dem Orte stehen, wo es bey den zu addirenden Zahlen steht, weil die Summe aus Hunderttheilen, auch nothwendig Hunderttheile, die Summe aus Zehntheilen wieder Zehntheile u. s. w. bedeuten muß. (§. 53.)

§. 65.

Eben dieses gilt auch von der Subtraction; denn eine geborgte Einheit in einer Classe weiter zur Linken muß bey den Decimalbrüchen, eben so, wie bey den ganzen Zahlen, in der vorhergehenden Stelle rechter Hand zehnmal mehr bedeuten (§. 62.). Man hat also hier weiter nichts zu beobachten, als was bey der Subtraction der ganzen Zahlen gelehrt worden ist. Das Comma bey der Differenz wird an eben den Ort gesetzt, wo es bey den gegebenen Zahlen stehet; weil man eigentlich nur die Zähler subtrahirt und die Nenner unverändert läßt (§. 55.). Z. E.

12',2'3'4
5,856
6,378

§. 66.

§. 66.

Auch die Multiplication und Division der Decimalbrüche ist von der Multiplication und Division der ganzen Zahlen nicht unterschieden, nur daß Anfänger hier eher, als bey der Addition und Subtraction, das Comma an einen unrechten Ort setzen können, wenn beyde gegebene Zahlen Decimalbrüche sind, welches einen ansehnlichen Fehler verursacht. Man merke daher folgende Regel. Das Product enthält so viel Decimalstellen, als in beyden Factoren zusammengenommen sind, und die Anzahl der Decimalstellen des Quotienten bekömmt man, wenn man die Anzahl der Decimalstellen des Divisors von der Zahl der Decimalstellen des Dividendi abzieht. Z. E. es sey 8, 257 durch 3, 43 zu multipliciren, so verfährt man damit, wie mit ganzen Zahlen.

8,257
3,43

24771
33028
24771

28,32151

Weil aber im Multiplicando 3 Zifern und im Multiplicator 2 Zifern Decimalbrüche bedeuten; so muß man in dem Producte 5 Zifern von der Rechten gegen die Linke zu, für die Decimalbrüche abschneiden, und das Comma daher gleich nach 28 setzen. Denn da bey der Multiplication nicht, wie bey der Addition und Subtraction, die Nenner unverändert bleiben,

sondern in einander multiplicirt werden (§. 58.); so wird man leicht einsehen, daß Tausendtheile in Hunderttheile multiplicirt, zum Producte Hunderttausendtheile geben müssen. Man darf auch nur die Decimalbrüche wie andre Brüche schreiben, so wird man sich leicht von der Richtigkeit der vorigen Regel überzeugen können. Z. E.

$$8{,}257 = \frac{8257}{1000}$$

$$3{,}43 = \frac{343}{100}$$

$$8{,}257 \times 3{,}43 = \frac{8257}{1000} \times \frac{343}{100} \quad (\S.\ 17.)$$

$$\frac{8257}{1000} \times \frac{343}{100} = \frac{2832151}{100000} \quad (\S.\ 58.)$$

$$8{,}257 \times 3{,}43 = \frac{2832151}{100000} = 2{,}832151. \quad (\S.\ 63.)$$

§. 67.

Wenn man ein Product, das aus der Multiplication zweyer Zahlen entstanden ist, durch den einen Factor dividirt, so muß man den andern Factor zum Quotienten erhalten (§. 19.). Folglich ist der Quotient

$$\frac{2{,}832151}{3{,}43} = 8{,}257$$

$$\text{und } \frac{2{,}832151}{8{,}257} = 3{,}43$$

Wor-

Woraus man sieht, daß, wenn im Dividendo 5 Zifern und im Divisor 2 Zifern Decimalbrüche bedeuten, der Quotient 3 Decimalstellen enthalte; wenn aber im Dividendo 5 und im Divisor 3 Decimalstellen sich befinden, im Quotienten nur 2 Zifern Decimalbrüche bedeuten können, und daß man also die Anzahl der Decimalstellen im Quotienten bekomme, wenn man die Decimalstellen im Divisor und Dividendo zählet, und die Anzahl der erstern von der Anzahl der letztern abziehet. Befinden sich im Dividendo weniger Decimalstellen als im Divisor, so setze man an den Dividendum rechter Hand so viel Nullen, bis man wenigstens eben so viel Decimalstellen bekömmt, als im Divisor befindlich sind. Denn die Nullen, welche man rechter Hand an einen Decimalbruch setzt, verändern seinen Werth eben so wenig, als die Nullen, welche linker Hand zu einer ganzen Zahl gesetzt werden. Z. E. es sey 34, 6 durch 4, 325 zu dividiren. Weil im Dividendo nur eine Zifer, im Divisor aber 3 Zifern Brüche bedeuten, so setze man zu dem erstern rechter Hand 2 Nullen, wodurch der Werth dieser Zahl ganz und gar nicht geändert werden kann, und dividire also statt 34,6 die ihr gleichgeltende Zahl 34,600

$$\begin{array}{r|l} 4,325)\ 34,600 & 8 \\ \underline{34,600} & \\ 0 & \end{array}$$

Hier enthält also der Divisor und auch der Dividendus drey Decimalstellen. Drey von Drey subtrahirt läßt 0. Der Quotient also kann hier keine Decimalstelle haben, und folglich muß die Zahl 8, Ganze

ze bedeuten. Wäre aber ein Rest geblieben, so hätte man an den Dividendum oder an den Ueberrest noch eine oder mehrere Nullen hängen können, wodurch man im Quotienten eben so viel Decimalbrüche würde erhalten haben.

Fünftes Capitel.

Von den Quadrat- und Cubik-Zahlen.

§. 68.

Ein Product, das aus lauter gleichen Factoren besteht, nennt man eine **Dignität** oder **Potenz** von einem solchen Factor, der in Ansehung der Dignität den Namen der **Wurzel** erhält. So ist 8×8 d. i. 64 eine Potenz von 8, und 8 hingegen die Wurzel von 64. Man unterscheidet aber die Dignitäten nach der Anzahl der Factoren, die sich bey einem solchen Producte befinden, und nennt daher ein Product, das aus zwey gleichen Factoren besteht, die zweyte Dignität, ein Product von drey gleichen Factoren, die dritte Dignität, u. s. f. Die Wurzel selbst wird auch die erste Dignität genannt. Die Zahl, wodurch man anzeigt, von welcher Dignität die Rede ist, heißt der **Exponent** (exponens dignitatis) und wird oben rechter Hand an die Wurzel geschrieben. So bedeutet der Ausdruck 5^4

nichts

nichts anders, als die vierte Dignität von 5. d. i. das Product 5 × 5 × 5 × 5, oder die Zahl 625. Die zweyte Dignität, welche also entsteht, wenn eine Zahl in sich selbst multiplicirt wird, nennt man auch **Quadratzahl** und ihre Wurzel **Quadratwurzel**; die dritte Dignität **Cubikzahl** und ihre Wurzel **Cubikwurzel**; mit welchen beyden wir uns nur allein beschäftigen werden. Das Wurzelzeichen ist $\sqrt{}$, in welches der Exponent gesetzt wird, wenn von einer andern Dignität, als der zweyten, die Rede ist. Also bedeutet $\sqrt[3]{27}$ die Wurzel der dritten Dignität, oder die Cubikwurzel aus 27 d. i. 3, hingegen $\sqrt{81}$ die Wurzel der zweyten Dignität, oder die Quadratwurzel aus 81 d. i. 9.

§. 69.

Die Quadratzahlen, Cubikzahlen und Dignitäten überhaupt werden **vollkommen** genannt, wenn sich die Wurzel genau angeben läßt, **unvollkommen** hingegen, wo die Wurzel nicht nach der größten Schärfe bestimmt werden kann. So ist z. E. 16 eine vollkommne Quadratzahl, denn die Wurzel ist 4; hingegen 17 eine unvollkommne Quadratzahl, denn die Wurzel ist grösser als 4, aber kleiner als 5, und der Bruch, um welches sie grösser als 4 ist, läßt sich niemals nach der größten Schärfe bestimmen. Die Wurzel aus den vollkommenen Dignitäten nennt man **rational**, weil sie sich völlig ausrechnen lassen, und die Wurzeln aus den unvollkommenen **irrational**, weil sie niemals ganz genau ausgerechnet werden können. Man benennt auch die Wurzeln von der Anzahl der Theile, aus denen sie bestehen, und heisset

daher solche, die nur eine Zifer haben, **monomische** oder **eintheilichte**; die aus zwey Zifern bestehen, **binomische** oder **zweytheilichte**; und diejenigen, die mehr als zwey Zifern haben, **polynomische** oder **vieltheilichte** Wurzeln. So ist 7 eine monomische, 35 eine binomische, und 438 eine polynomische Wurzel.

§. 70.

Wird uns eine Zahl gegeben, und von derselben das Quadrat verlangt, so hat man nichts weiter zu thun, als die gegebene Zahl in sich selbst zu multipliciren, wie ein jeder schon von selbst aus der Erklärung einer Quadratzahl einsehen wird. Wir wollen daher das Quadrat von einer binomischen Wurzel suchen, z. E. von 75, und die einzelnen Producte alle ausschreiben, um daraus einen Lehrsatz herzuleiten, der uns zur Ausziehung der Quadratwurzeln den Weg bahnen wird:

auf die gewöhnliche Art

$$\begin{array}{r} 75 \\ 75 \\ \hline 375 \\ 525 \\ \hline 5625 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 25 &= 5 \times 5 = 5^2 \\ 35 &= 5 \times 7 \\ 35 &= 7 \times 5 \\ 49 &= 7 \times 7 = 7^2 \end{aligned}$$

$$75^2 = 5625 = 7 \times 7 + 2 \times 7 \times 5 + 5 \times 5$$
$$= 7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2$$

Hier-

Hieraus sieht man also, daß die Quadratzahl von 75, aus der Quadratzahl von 7, aus dem Producte 7 × 5 zweymal genommen, und aus der Quadratzahl von 5 zusammen gesetzt ist. Wir wollen diejenige Zifer, welche Zehner bedeutet, nämlich 7, den ersten, und die andre Zifer, nämlich 5, welche sich auf Einer bezieht, den andern Theil nennen; so läßt sich aus diesem Beyspiele folgender allgemeine Lehrsatz herleiten.

Das Quadrat einer binomischen Wurzel besteht aus dem Quadrat, des ersten Theils, aus dem zweyfachen Producte der beyden Theile in einander, und aus dem Quadrate des andern Theils.

Wenn man denjenigen Theil, welcher Zehner enthält, den ersten nennt; so muß nothwendig das Quadrat desselben Hunderte bedeuten, weil es aus der Multiplication der Zehner in Zehner entstehet. Hingegen das zweyfache Product aus den beyden Theilen in einander, weil hier Zehner in Einer multiplicirt werden, muß sich auf Zehner, und das Quadrat des andern Theils auf blosse Einer beziehen, weil hier nur Einer durch Einer multiplicirt werden. Man pflegt insgemein, um diesen Satz durch Zeichen kurz auszudrücken, den ersten Theil der Wurzel a, und den andern b zu nennen, so daß a + b jede mögliche binomische Quadratwurzel bedeutet. Multiplicirt man nun a + b in sich selbst, so erhält man einen Ausdruck, der alle mögliche Quadratzahlen binomischer Wurzeln vorstellen kann.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \end{array}$$

Soll a Zehner und b Einer bedeuten, so wird a^2 Hunderte, 2 ab Zehner, und b^2 Einer bedeuten müssen.

§. 71.

Wenn man von einer Reihe Zahlen, wovon die folgende zehnmal grösser ist, als die vorhergehende, die Quadratzahlen macht; so wird man finden, daß in diesem Falle das folgende Quadrat allemal 100 mal grösser ist, als das vorhergehende, und daß also die Wurzel nur um eine Figur vermehrt wird, wenn das Quadrat um 2 Figuren zunimmt. Z. E.

$$\begin{array}{rcl} 1^2 & = & 1 \\ 10^2 & = & 100 \\ 100^2 & = & 10000 \\ 1000^2 & = & 1000000 \\ 10000^2 & = & 100000000 \end{array}$$

Aus dieser Ursache pflegt man die Quadratzahlen, wenn man die Wurzel ausziehen will, in Classen zu theilen, und jeder Classe zwey Zifern zu geben, damit man aus der Zahl dieser Classen sehen könne, wie viel einzelne Theile die Wurzel enthalte.

§. 72.

Nun wollen wir kürzlich sehen, auf was für Art sich die Wurzeln aus den gegebenen Quadratzahlen ent=

entdecken lassen. Die eintheiligen Wurzeln aus vollkommnen Quadratzahlen sind leicht zu finden, wenn man sich aus dem Einmaleins folgendes Täfelchen abschreibt, worinnen die Producte aller einfachen Zahlen in sich selbst, und folglich ihre Quadrate enthalten sind.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

Ist nun die gegebene Zahl eine vollkommne Quadratzahl, und zwar einer eintheiligten Wurzel, so muß sie in der zweyten Reihe und die Wurzel darüber stehen. Auf diese Art sieht man, daß 8 die Wurzel aus 64, und 7 die Wurzel aus 49 ist.

§. 73.

Ist die Wurzel aus der gegebenen Zahl aber zweytheiligt, welches man daraus sehen kann, wenn sich die gegebene Zahl in zwey Classen zergliedern läßt, (§. 71.) so kann man sie folgendergestalt finden. Es sey z. E. die Wurzel aus 5625 zu suchen:

$$\begin{array}{r|l} 5\cdot 6 & 25 \} 75 \\ a^2 = 49 & \\ \hline 7 & 25 = 2ab + b^2 \\ & (14) = 2a \\ & 2ab = 70 \\ & b^2 = 25 \\ \hline & 725 \\ \hline & 0 \end{array}$$

daher solche, die nur eine Zifer haben, **monomische** oder **eintheilichte**; die aus zwey Zifern bestehen, **binomische** oder **zweytheilichte**; und diejenigen, die mehr als zwey Zifern haben, **polynomische** oder **vieltheilichte** Wurzeln. So ist 7 eine monomische, 39 eine binomische, und 438 eine polynomische Wurzel.

§. 70.

Wird uns eine Zahl gegeben, und von derselben das Quadrat verlangt, so hat man nichts weiter zu thun, als die gegebene Zahl in sich selbst zu multipliciren, wie ein jeder schon von selbst aus der Erklärung einer Quadratzahl einsehen wird. Wir wollen daher das Quadrat von einer binomischen Wurzel suchen, z. E. von 75, und die einzelnen Producte alle ausschreiben, um daraus einen Lehrsatz herzuleiten, der uns zur Ausziehung der Quadratwurzeln den Weg bahnen wird:

auf die gewöhnliche Art

$$\begin{array}{r} 75 \\ 75 \\ \hline 375 \\ 525 \\ \hline 5625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ 75 \\ \hline \end{array}$$

$$25 = 5 \times 5 = 5^2$$

$$35 = 5 \times 7$$

$$35 = 7 \times 5$$

$$49 = 7 \times 7 = 7^2$$

$$75^2 = 5625 = 7 \times 7 + 2 \times 7 \times 5 + 5 \times 5$$
$$= 7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2$$

Hier-

Hieraus sieht man also, daß die Quadratzahl von 75, aus der Quadratzahl von 7, aus dem Producte 7 × 5 zweymal genommen, und aus der Quadratzahl von 5 zusammen gesetzt ist. Wir wollen diejenige Zifer, welche Zehner bedeutet, nämlich 7, den ersten, und die andre Zifer, nämlich 5, welche sich auf Einer bezieht, den andern Theil nennen; so läßt sich aus diesem Beyspiele folgender allgemeine Lehrsatz herleiten.

Das Quadrat einer binomischen Wurzel besteht aus dem Quadrat, des ersten Theils, aus dem zweyfachen Producte der beyden Theile in einander, und aus dem Quadrate des andern Theils.

Wenn man denjenigen Theil, welcher Zehner enthält, den ersten nennt; so muß nothwendig das Quadrat desselben Hunderte bedeuten, weil es aus der Multiplication der Zehner in Zehner entstehet. Hingegen das zweyfache Product aus den beyden Theilen in einander, weil hier Zehner in Einer multiplicirt werden, muß sich auf Zehner, und das Quadrat des andern Theils auf blosse Einer beziehen, weil hier nur Einer durch Einer multiplicirt werden. Man pflegt insgemein, um diesen Satz durch Zeichen kurz auszudrücken, den ersten Theil der Wurzel a, und den andern b zu nennen, so daß a + b jede mögliche binomische Quadratwurzel bedeutet. Multiplicirt man nun a + b in sich selbst, so erhält man einen Ausdruck, der alle mögliche Quadratzahlen binomischer Wurzeln vorstellen kann.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \end{array}$$

Soll a Zehner und b Einer bedeuten, so wird a^2 Hunderte, 2 ab Zehner, und b^2 Einer bedeuten müssen.

§. 71.

Wenn man von einer Reihe Zahlen, wovon die folgende zehnmal grösser ist, als die vorhergehende, die Quadratzahlen macht; so wird man finden, daß in diesem Falle das folgende Quadrat allemal 100 mal grösser ist, als das vorhergehende, und daß also die Wurzel nur um eine Figur vermehrt wird, wenn das Quadrat um 2 Figuren zunimmt. Z. E.

$$\begin{array}{rcl} 1^2 & = & 1 \\ 10^2 & = & 100 \\ 100^2 & = & 10000 \\ 1000^2 & = & 1000000 \\ 10000^2 & = & 100000000 \end{array}$$

Aus dieser Ursache pflegt man die Quadratzahlen, wenn man die Wurzel ausziehen will, in Classen zu theilen, und jeder Classe zwey Zifern zu geben, damit man aus der Zahl dieser Classen sehen könne, wie viel einzelne Theile die Wurzel enthalte.

§. 72.

Nun wollen wir kürzlich sehen, auf was für Art sich die Wurzeln aus den gegebenen Quadratzahlen ent-

entdecken lassen. Die eintheiligen Wurzeln aus vollkommnen Quadratzahlen sind leicht zu finden, wenn man sich aus dem Einmaleins folgendes Täfelchen abschreibt, worinnen die Producte aller einfachen Zahlen in sich selbst, und folglich ihre Quadrate enthalten sind.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

Ist nun die gegebene Zahl eine vollkommne Quadratzahl, und zwar einer eintheiligten Wurzel, so muß sie in der zweyten Reihe und die Wurzel darüber stehen. Auf diese Art sieht man, daß 8 die Wurzel aus 64, und 7 die Wurzel aus 49 ist.

§. 73.

Ist die Wurzel aus der gegebenen Zahl aber zweytheiligt, welches man daraus sehen kann, wenn sich die gegebene Zahl in zwey Classen zergliedern läßt, (§. 71.) so kann man sie folgendergestalt finden. Es sey z. E. die Wurzel aus 5625 zu suchen:

$$\begin{array}{r|l} 56 \,|\, 25 & 75 \\ a^2 = 49 & \\ \hline 7 \,|\, 25 = 2ab + b^2 & \\ (14) = 2a & \\ 2ab = 70 & \\ b^2 = 25 & \\ \hline 725 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Weil nämlich das Quadrat des ersten Theils in diesem Falle Hunderte bedeutet (§. 70.), so muß es nothwendig unter den Hunderten, d. i. in der ersten Classe zur Linken, wo die Hunderte stehen, enthalten seyn. Man suche daher 56 in dem Quadrattäfelchen (§. 72.) und nehme das nächst kleinere Quadrat, wofern man diese Zahl selbst darinnen nicht antrift. Dieses nächst kleinere Quadrat ist hier 49, welches also a^2 oder das Quadrat des ersten Theils seyn muß. Die Wurzel von 49 ist 7, und folglich a oder der erste Theil selbst, welchen man rechter Hand hinter einen Strich zu schreiben pflegt. Nunmehr zieht man das Quadrat des ersten Theils ab, und setzt hierzu die folgende Classe, so muß in den Zifern 725 noch das zweyfache Product des ersten Theils in den andern, und das Quadrat des andern Theils, oder, nach unsern Buchstaben, $2ab + b^2$ enthalten seyn. Wird 2 ab durch 2 a dividirt, so ist der Quotient b (§. 19.). Man nehme also den gefundenen ersten Theil, nämlich 7 zweymal, und dividire damit die 72 Zehner, weil das Product 2 ab in den Zehnern stecken muß (§. 70.). Der Quotient $\frac{72}{14}$ ist 5, welches der andere Theil der Wurzel seyn muß, der Einer bedeutet; daher man ihn neben den ersten, welcher sich auf Zehner bezieht, rechter Hand setzet. Nachdem man nun die Wurzel gefunden hat, so ist es noch nöthig, die Producte 2 ab und b^2 zu bestimmen, und sie von 725 abzuziehen, damit man sehen könne, ob man nicht eine zu grosse Zahl genommen habe, und ob die gegebene Quadratzahl eine vollkommne sey, oder nicht. Man multiplicirt daher den zweyten Theil 5 in den Divisor 14, und bekömmt dadurch also das zweyfache Product aus dem ersten Theile in den andern, weil der Divi-

sor

sor schon den ersten Theil zweymal enthält. Man setzt dasselbe unter die Zehner, weil es Zehner bedeutet, und addirt hierzu noch das Quadrat der Zahl 5, als des andern Theiles, welches blosse Einer enthält, und daher eine Stelle weiter rechter Hand gerückt wird. Die Summe 725 muß also $2ab + b^2$ enthalten, und folglich kann nichts übrig bleiben, wenn sie von der obigen Zahl 725, die ebenfalls aus den Theilen $2ab + b^2$ zusammengesetzt ist, subtrahirt wird. Will man sich noch mehr überzeugen, ob man die wahre Wurzel gefunden habe, oder nicht, so multiplicire man dieselbe in sich selbst. Das Product muß so groß seyn, als die gegebene Quadratzahl. Z. E.

75
75
375
525
5652

Uebrigens ist noch dieses zu merken, daß man bey Ausziehung der Quadratwurzel nicht nothwendig so weitläuftig seyn darf, als vorhin gezeigt wurde, um den Grund dieser Rechnung deutlich vor Augen zu stellen. Denn wenn man den andern Theil rechter Hand neben den Divisor setzt, und hierauf die ganze Zeile mit dem zweyten Theile multiplicirt; so erhält man auf einmal das zweyfache Product aus dem ersten Theile in den andern, nebst dem Quadrate des andern Theils. Nach dieser Art würde man das vorige Exempel folgendergestalt rechnen.

$$\begin{array}{r|l} 56 & 25 \} 75 \\ a^2 = 49 & \\ \hline 7 & 25 \\ & (14)5 = 2a + b \\ 2ab + b^2 = & 725 \\ \hline & 0 \end{array}$$

§. 74.

Wenn man das bisherige verstanden, und sich dadurch in Stand gesetzt hat, eine binomische Wurzel finden zu können, so wird man auch ohne Schwierigkeit einsehen, wie es möglich sey, eine polynomische oder vieltheilige Wurzel aus einer gegebenen Quadratzahl zu entdecken. Denn da bey den Zahlen die Menge der Theile von unsrer Willkühr abhängt; so ist klar, daß sich eine vieltheilige Wurzel auch als eine zweytheilige betrachten läßt. Diese Vorstellung hat den Nutzen, daß man aus den vorigen Regeln, die eine zweytheilige Wurzel finden lehren, eine allgemeine Regel für alle vieltheilige Wurzeln herleiten kann. Wir wollen zu einem Beyspiele die Zahl 435 wählen, und sie als die Wurzel von einer zu suchenden Quadratzahl betrachten. Wollen wir jede Zifer als einen besondern Theil ansehen, so ist offenbar, daß die Wurzel drey Theile hat. Wir können aber auch die Hunderte und Zehner zusammen genommen als einen, und die Einer als den andern Theil ansehen, so wird sie nur aus zwey Theilen, nämlich aus 43 Zehnern und 5 Einern bestehen. Das Quadrat von 435 muß daher so groß seyn, als das Quadrat von der Summe $43' + 5°$. Nun besteht aber das

Qua-

Quadrat von $43' + 5^\circ$ aus $43^2 + 2 \times 43 \times 5 + 5^2$ (§. 70.), wo nichts als die Bestimmung der Einheiten weggelassen ist, die hernach hinzugesetzt werden soll. Wenn man nun erwägt, daß $43'$ eben so viel sind, als $4'' + 3'$ und folglich das Quadrat von $43'$ so viel, als das Quadrat der Summe aus $4'' + 3'$, welches (§. 70.) aus dem Quadrate von $4''$, dem zweyfachen Producte aus $4''$ in $3'$ und dem Quadrate von $3'$ bestehen muß. Wenn man ferner überlegt, daß die Quadratzahl von Hunderten nothwendig Zehntausende bedeutet; weil 100 in 100 multiplicirt 10000 macht; daß endlich ein Product aus Hunderten in Zehnern, Tausende, und ein Quadrat von Zehnern Hunderte geben muß: so wird man folgende Schlüsse leicht einsehen, welche durch die oben erklärten Zeichen ausgedrückt sind. Die Parenthesen bey $43' + 5^\circ$ und bey $4'' + 3'$ haben diese Bedeutung, daß man ein Quadrat von der ganzen Summe und nicht blos von der letzten Zifer verlangt.

$435 = 43' + 5^\circ$ (§. 10.)

$435^2 = (43' + 5^\circ)^2$

$(43' + 5^\circ)^2 = 43''^2 + 2 \times 43' \times 5^\circ + 5^{\circ 2}$ (§. 70.)

$435^2 = 43''^2 + 2 \times 43' \times 5^\circ + 5^{\circ 2}$ (§. 11.)

$43' = 4'' + 3'$ (§. 10.)

$435^2 = (4'' + 3')^2 + 2 \times 43' \times 5 + 5^{\circ 2}$ (§. 9.)

$(4'' + 3')^2 = 4''''^2 + 2 \times 4''' \times 3 + 3''^2$ (§. 70.)

$435^2 = 4''''^2 + 2 \times 4''' \times 3 + 3''^2 + 2 \times 43' \times 5 + 5^{\circ 2}$ (§. 9.)

Die

Die Quadratzahl der dreytheilichten Wurzel 435 enthält also, wenn wir 4″ den ersten, 3″ den andern, und 5^{c} den dritten Theil nennen, das Quadrat des ersten Theils, ein zweyfaches Product aus dem ersten Theile in den andern, ein Quadrat des andern Theils, ein zweyfaches Product aus der Summe der ersten beyden Theile in den dritten, und ein Quadrat des dritten Theils; und zwar bezieht sich das Quadrat des ersten Theils auf Zehntausende, das zweyfache Product aus dem ersten Theile in den andern auf Tausende, das Quadrat des andern Theils auf Hunderte, das zweyfache Product aus der Summe der ersten beyden Theile in den dritten auf Zehner, und das Quadrat des dritten Theils auf Einer, wenn der erste Theil Hunderte, der andre Zehner und der dritte Einer bedeutet. Anfänger können sich von diesem Satze auch noch folgendergestalt durch die Erfahrung überzeugen.

$$4^{2} = 160000$$
$$2 \times 4 \times 3 = 24000$$
$$3^{2} = 900$$
$$2 \times 43 \times 5 = 4300$$
$$5^{2} = 25$$
$$189225$$

435
435
2175
1305
1740
189225

Aus dieser Rechnung ersieht man, daß die vorhin erzählten Stücke wirklich das ganze Quadrat von 435 ausmachen. Will man sich den vorigen Satz in seiner Allgemeinheit vorstellen, so benenne man die einzelnen

zelnen Theile einer dreytheilichten Wurzel mit den Buchstaben a, b, c, und die Summe der ersten beyden, nämlich a + b mit dem einzigen Buchstaben S, so wird man die vorigen Schlüsse auf sie leicht anwenden können. Nämlich

$$a + b = S$$

$$a + b + c = S + c \quad (\S.\ 13.)$$

$$(a + b + c)^2 = (S + c)^2 \quad (\S.\ 17.)$$

$$(S + c)^2 = S^2 + 2Sc + c^2 \quad (\S.\ 70.)$$

$$(a + b + c)^2 = S^2 + 2Sc + c^2 \quad (\S.\ 11.)$$

$$S^2 = (a + b)^2$$

$$(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2Sc + c^2 \quad (\S.\ 9)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (\S.\ 70.)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2Sc + c^2 \quad (\S.\ 9.)$$

oder $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$

§. 75.

Auf eben diese Art kann man leicht finden, aus was für Theilen die Quadratzahl einer viertheilichten Wurzel bestehe. Wir wollen die Sache gleich allgemein betrachten, und daher die vier Theile einer solchen Wurzel durch die Buchstaben, a, b, c, d ausdrücken. Die Summe aus den ersten dreyen, nämlich a + b + c heiße wiederum S; so kann man folgendergestalt schließen.

$$a + b + c = S$$

$$a + b + c + d = S + d \quad (\S.\ 13.)$$

$$(a + b + c + d)^2 = (S + d)^2 \quad (\S.\ 17.)$$

$$(S + d)^2 = S^2 + 2Sd + d^2 \quad (\S.\ 70.)$$

$$(a + b + c + d)^2 = S^2 + 2Sd + d^2 \quad (\S.\ 11.)$$

$$S^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 \quad (\S.\ 74.)$$

Folglich $(a + b + c + d)^2 =$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2Sd + d^2 \quad (\S.\ 9.)$$

oder weil $S = a + b + c$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2$$

Diese letztere Zeile würde, wenn man sie mit Worten ausdrücken wollte, folgendergestalt lauten:

Das Quadrat einer viertheiligen Wurzel enthält das Quadrat des ersten Theils, ein zweyfaches Product aus dem ersten Theile in den andern, das Quadrat des andern Theils, ein zweyfaches Product aus der Summe der ersten beyden Theile in den dritten, das Quadrat des dritten Theils, ein zweyfaches Product aus der Summe der ersten drey Theile in den vierten Theil, und das Quadrat des vierten Theils.

Wollte man wissen, aus was für Theilen das Quadrat einer fünftheilichten Wurzel bestehe, so dürfte man nur eine solche Wurzel auf die vorige Art sich als eine zweytheilichte vorstellen. Man würde immer finden, daß die Quadratzahl einer jeden polynomischen Wurzel aus dem Quadrate eines jeden

Theiles

Theiles und einem doppelten Producte aller Theile in einander bestehe.

§. 76.

Aus den bisherigen Betrachtungen wird sich nun leicht einsehen lassen, daß eine vieltheilichte Wurzel eben so gut, als eine zweytheilichte, und fast auf eben die Art gefunden werden kann. Man darf nur anfangs die beyden ersten Theile, wie bey den zweytheilichten suchen, die gefundenen Theile als einen einzigen ansehen, sie doppelt nehmen und damit dividiren, um den dritten Theil zu finden u. s. f. wie man aus folgendem Beyspiele sehen wird. Es sey nämlich die Wurzel aus 767376 zu finden.

76|73|76(abc
876

$$\begin{array}{l}
\overset{IIII}{a^2} = 64 \\
\hline
12|73 \\
(16) = 2a \\
\overset{III}{2ab} = 112 \\
b^{II}/_2 = 49 \\
\hline
\overset{III}{2ab} + b^{II}/_2 = 1169 \\
\hline
104|76 \\
(174) = 2(a+b) \\
2(a+b)^{I} c = 1044 \\
\overset{o}{c^2} = 36 \\
\hline
2(a+b)^{I} c + c^2 = 10476 \\
\hline
0
\end{array}$$

Der Grund dieser Rechnung ist folgender. Weil sich aus der gegebenen Quadratzahl drey Classen ma-

chen lassen, so muß die Wurzel dreytheilich seyn (§. 71.). Das Quadrat des ersten Theils muß sich also auf Zehntausende beziehen (§. 74.); daher es in der ersten Classe linker Hand, wo die Zehntausende stehen, gesucht worden ist. Das Quadrat, welches der Zahl 76 in dem Quadrattäfelchen am nächsten kömmt, ist 64, und also die Wurzel davon, nämlich 8, der erste Theil, der rechter Hand nach der gegebenen Quadratzahl gesetzt worden ist, und der eigentlich Hunderte bedeutet, welches aber hier nicht besonders angemerkt werden darf; weil er schon durch die Hinzusetzung der andern beyden Theile seinen Werth aus der dritten Stelle erhält. Wird nun das Quadrat des ersten Theils abgezogen, so müssen in den übriggebliebenen 12 Hunderten und den andern Ziffern 7376 die noch übrigen Theile der Quadratzahl enthalten seyn. Da man aber nicht gleich alle Zifern oder Theile nöthig hat, so rückt man nur die folgende Classe herunter, nimmt den gefundenen Theil 8 doppelt, setzt diese doppelte 8 d. i. 16 unter die Tausende, und dividirt sie damit; weil das zweyfache Product aus dem ersten Theile in den andern bey einer dreytheilichten Wurzel Tausende bedeutet (§. 74.).

und $\frac{2ab}{2a} = b$ ist (§. 19.). Den Divisor 2a d. i. hier 2mal 8 oder 16 streicht man aus, oder schließt ihn in Häkchen ein, damit man ihn nicht beym Zusammenaddiren für einen Theil halte. 16 in 127 steckt 7 mal, welches also b oder der zweyte Theil ist. Dieser neue Theil 7 multiplicirt in den Divisor 16, welcher 2a ausmacht, giebt nothwendig 2ab oder das zweyfache Product aus dem ersten Theile in den andern, welches unter die Tausende gesetzt wird, weil

es

es sich ebenfalls auf Tausende beziehet. Das folgende Stück der ganzen Quadratzahl, nämlich b''^2 d. i. in diesem Falle 7^2 oder 49 bedeutet Hunderte, und wird daher eine Stelle weiter zur Rechten gerückt. Wird nun beydes addirt, und die Summe 1169 d. i. $2ab + b^2$ von 1273 abgezogen, so müssen in den übrig gebliebenen 104 Hunderten, wenn man hierzu noch die in der letzten Classe befindlichen 76 Einer hinzusetzt, die beyden letzten Stücke der obigen Quadratzahl, nämlich $2(a + b')c + c^2$ enthalten seyn. Man rückt also die letzte Classe 76 herunter, nimmt die beyden gefundenen Theile der Wurzel 87 doppelt, und dividirt damit, um den dritten Theil zu erhalten, die ganze Menge der Zehner, weil $2(a+b) \times c$ sich auf Zehner beziehet (§. 74.). Mit dem Quotienten 6, als dem dritten Theile der Wurzel, multiplicirt man den Divisor, und setzt das Product unter die Zehner, so hat man $2(a + b) \times c$, worunter man das Quadrat von 6 setzt, und zwar unter die Einer, weil es Einer bedeutet, und endlich die Summe von beyden aus der obern Zahl 10476 abzieht, um zu sehen, ob man nicht einen zu grossen Theil genommen habe, und ob die gegebene Zahl ein vollkommnes Quadrat sey oder nicht.

Wenn man den gefundenen Theil allezeit rechter Hand an den Divisor setzt, und mit demselben die ganze Zeile multiplicirt, so kann man die Rechnung viel kürzer haben. Z. E.

	76|73|76.(876,	
a^2 =	64	Probe
	12|73	
	(16)7	876
$2ab + b^2$ =	1169	876
	104|76	5256
	(174)6	6132
$2(a+b)c + c^2$ =	10476	7008
	0	767376

§. 77.

Auf eine ähnliche Art würde man eine Wurzel finden können, die aus 4 und mehr Zifern bestünde. Man dürfte nur dieses überlegen, daß z. E. die Quadratzahl der ersten Zifer, die bey einer viertheilichten Wurzel Tausende bedeutet, sich auf Millionen beziehen, und folglich unter den Millionen gesucht werden müßte. Nach folgenden Regeln, die man nunmehr aus den vorhergehenden Sätzen verstehen wird, könnte die gröste Quadratwurzel gefunden werden.

1. Man theile die gegebene Zahl in Classen von der Rechten gegen die Linke, und schneide für jede Classe allemal zwey Zifern ab. Eine einzige Classe, nämlich die erste linker Hand, kann auch eine Zifer enthalten.

2. Man suche in dem Quadrattäfelchen die Zahl, welche in der ersten Classe linker Hand sich befindet, und nehme die nächst kleinere Quadratzahl, wofern man sie nicht selbst darinnen antrift, schreibe sie darunter, und subtrahire sie. Die Wurzel davon ist der erste Theil der Wurzel, die gesucht wird.

3. Nach-

3. Nachdem man die folgende Classe heruntergerückt hat, so nehme man den gefundenen ersten Theil doppelt, und dividire damit die Zahl, die aus dem vorigen Ueberreste und der ersten Zifer der heruntergerückten Classe bestehet. Der Quotient ist der zweyte Theil der Quadratwurzel, der also neben den ersten gesetzt wird.

4. Mit diesem neuen Theile multiplicire man den Divisor, welcher deswegen unter die zu dividirende Zahl gesetzt wird, und schreibe darunter, aber eine Stelle weiter zur Rechten, das Quadrat des neuen Theils, addire beydes, und subtrahire es von der obigen Zahl. Oder will man gleich beyde Stück ohne Addition auf einmal haben, so setze man den neuen Theil rechter Hand an den Divisor, und multiplicire damit die ganze Zeile.

5. Nachdem man wieder die folgende Classe herunter gerückt hat, so nehme man beyde gefundene Theile doppelt, und dividire damit die Zahl, welche aus dem vorigen Ueberreste, und der ersten Zifer der heruntergerückten Classe bestehet. Den Quotienten, als den dritten Theil, setze man neben die ersten beyden, und multiplicire damit, wie vorhin, den Divisor, setze hierzu das Quadrat des neuen Theils eine Stelle weiter zur Rechten, addire beydes, und ziehe die Summe wieder von der obern Zahl ab. Man kann aber auch hier wieder diese Summe auf einmal erhalten, wenn man, wie vorhin erinnert wurde, den neuen Theil rechter Hand neben den Divisor setzt, und hernach mit demselben die ganze Zeile multiplicirt.

6. Nunmehr nehme man die ersten drey Theile doppelt, dividire damit, um den vierten zu finden, und verfahre in allen Stücken, wie vorhin.

7. Hat man den vierten Theil gefunden, und die übrige Rechnung angestellt, so nehme man diese gefundnen vier Theile doppelt, und rechne aufs neue, um den fünften Theil zu finden, nach der vorigen Art, so daß man immer, wenn die Wurzel aus sehr vielen Theilen besteht, alle vorhergehende Theile als eine Zahl ansieht, und das zweyfache davon zum Divisor macht, und die Rechnung so lange fortsetzet, bis man alle Theile der Wurzel entdeckt hat.

§. 78.

Aus Brüchen macht man Quadrate, wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner in sich selbst multipliciret. Denn das Quadrat einer jeden Zahl entsteht, wenn sie in sich selbst multipliciret wird (§. 68.); folglich muß auch ein Bruch durch die Multiplication in sich selbst zum Quadrat gemacht werden. Und wenn man nun dieses thut, und z. E. $\frac{5}{10}$ in $\frac{5}{10}$ multiplicirt; so erhält man $\frac{5 \times 5}{6 \times 6}$ oder $\frac{25}{36}$ (§. 58.). Von 0,3 d. i. $\frac{3}{10}$ würde also das Quadrat 0,09 d. i. $\frac{9}{100}$ und von 0,03 d. i. $\frac{3}{100}$ würde das Quadrat 0,0009 d. i. $\frac{9}{10000}$ seyn. Woraus man sieht, daß bey einem Decimalbruche das Quadrat Hunderttheile bedeutet, wenn die Wurzel Zehntheile enthält, Zehntausendtheile aber, wenn sich die Wurzel auf Hunderttheile beziehet, und überhaupt, daß die

die Quadratzahl eines Decimalbruches noch einmal so viel Decimalstellen hat, als die Wurzel. Ferner ist klar, daß man die Wurzel aus einem Bruche finden wird, wenn man sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner die Wurzel zieht. Die Wurzel aus $\frac{25}{36}$ muß so viel seyn $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$ d. i. $\frac{5}{6}$, weil sowohl der Zähler als der Nenner quadrirt wird, wenn man das Quadrat des Bruchs aus der Wurzel macht.

§. 79.

Aus den unvollkommenen Quadratzahlen lassen sich zwar die Wurzeln niemals nach der größten Schärfe erhalten, wie hernach gezeigt werden soll; man kann sie aber durch Näherung so weit suchen, daß der Fehler, der dabey begangen wird, für nichts mehr zu halten ist, wenn man die Zahlen in gleichgeltende Brüche verwandelt. Allein nicht alle Brüche sind zu dieser Absicht gleich bequem. Man erwählt daher bey der Ausziehung der Irrationalwurzeln nur Decimalbrüche, und zwar solche, deren Nenner vollkommne Quadratzahlen sind, damit man doch wenigstens aus dem Nenner die Wurzel völlig erhalten könne. Verwandelt man nun die Quadratzahl in Hunderttheile, so erhält man die Wurzel in Zehntheilen; verwandelt man sie in Zehntausendtheile, so erhält man die Wurzel in Hunderttheilen (§. 78.). Und überhaupt je grösser der Nenner des Bruchs ist, worein man die unvollkommne Quadratzahl verwandelt, desto mehr Decimalstellen wird die Wurzel erhalten, und desto mehr wird der Fehler vermindert werden. Z. E. wir wollen die Quadratwurzel aus

12 suchen, wovon man gleich wissen kann, daß sie grösser als 3 und kleiner als 4, folglich 3 und ein Bruch seyn muß. Um nun diesen Bruch einigermaßen zu finden; so wollen wir 12 durch einen Decimalbruch ausdrücken, und zum Nenner 100 nehmen, so ist $12 = \frac{1200}{100}$ oder 12,00 und folglich muß es einerley seyn, ob man die Wurzel aus 12 Ganzen, oder aus 1200 Hunderttheilen suchet.

```
12|00(3,4
 9|
--------
 3|00
 (6)4
  256
--------
   44
```

Die Wurzel aus 1200, vermöge der vorigen Rechnung, ist ohngefehr 34, und folglich die Wurzel aus 1200

——— weil die Wurzel aus dem Nenner 10 ist, $\frac{34}{10}$
100

oder 3, 4. (§. 78.). Weil aber am Ende noch 44 übrig blieb, so sieht man wohl, daß man noch nicht die wahre Wurzel gefunden, und vielleicht um ein, oder um einige Hunderttheile gefehlt hat; denn ein Zehntheil kann der Fehler nicht betragen, weil man sonst statt des andern Theils 4 die Zahl 5 nehmen müßte, welches aber hier nicht angeht. Wäre nun der Fehler von einem oder etlichen Hunderttheilen zu wichtig; so könnte man der Wahrheit immer näher kommen, wenn man einen grössern Nenner erwählte,

und

und z. E. 12 in 10000 Theile verwandelte. Denn da $\frac{120000}{10000} = 12$, so ist es einerley, ob man die Wurzel aus dem Bruche $\frac{120000}{10000}$ oder aus 12 suchet. Die Wurzel aus $\frac{120000}{10000}$ ist $\frac{\sqrt{120000}}{\sqrt{10000}}$ d. i. $\frac{\sqrt{120000}}{100}$ (78.), und folglich dürfte man nur die Wurzel aus 120000 suchen, und sie Hunderttheile bedeuten lassen, so würde man die Wurzel aus 12 erhalten.

```
12|00|00.(3,46          Probe
 9|  |                   346
------                   346
 3|00                   -----
 (6)4                   2076
 256                   1384
--------              1038
   44|00              ------
   (68)6              119716
   4116                  284
---------             ------
    284               120090
```

Nämlich die gefundene Zahl 346 ist so viel als $\frac{346}{100}$ oder $3\frac{46}{100}$, d. i. $3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100}$, woraus man sehen kann, wenn man sie mit der vorigen Wurzel $3\frac{4}{10}$ vergleicht, daß man jetzt $\frac{6}{100}$ mehr erhalten und also weniger gefehlt habe, als vorhin. Wollte man nun die Wurzel aus 12 noch genauer haben, so dürfte man nur diese Zahl in einen Decimalbruch von einem noch grössern Nenner, z. E. in 1000000 Theile verwandeln; so würde man die Wurzel in Tausendtheilen erhalten, und auf diese Art könnte man die Rech-

nung so lange fortsetzen, bis der Fehler, welcher noch dabey begangen würde, von keiner Erheblichkeit wäre. Man möchte aber die Rechnung so lange fortsetzen, als man wollte; so würde man doch allemal noch einen Ueberrest behalten, und folglich die Wurzel nicht nach der größten Schärfe bey dergleichen unvollkommnen Quadratzahlen bestimmen können. Denn wollte man annehmen, daß nach einer fortgesetzten Rechnung endlich einmal nichts übrig bleiben müßte; so würde hieraus folgen, daß in gegenwärtigem Falle, wenn man die Wurzel in sich selbst multiplicirte, die Zahl 12 mit allen angehängten Nullen herauskommen müßte. Dieses ist aber ganz unmöglich. Denn der letzte Decimalbruch in der Wurzel ist entweder 1, oder 2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 6, oder 7, oder 8, oder 9. Allein keine von diesen Zahlen giebt in sich selbst multiplicirt im Product eine Null; welches doch nothwendig geschehen müßte, wenn das Quadrat von der ganzen Wurzel eine 12 mit lauter Nullen rechter Hand seyn sollte.

Bey der Probe ist noch dieses zu errinnern, daß man zu der Quadratzahl der Wurzel den Ueberrest addiren muß. Denn z. E. 346 ist nicht eigentlich die Wurzel aus 120000, weil 284 übrig blieb, sondern aus einer Zahl, die um 284 Einheiten kleiner ist. Diese 284 Einheiten müssen also zu dem Quadrat von 346 noch hinzu gesetzt werden, wenn man die vorige Zahl 120000 erhalten will.

§. 80.

Da eine Cubikzahl nichts anders ist, als ein Product aus drey gleichen Factoren, wovon jeglicher die Wur-

Wurzel genannt wird (§. 68.), so ist leicht einzusehen, daß man eine gegebene Zahl zur Cubikzahl erheben könne, wenn man das Quadrat derselben in die Wurzel multiplicirt; denn $2 \times 2 \times 2$ muß so viel seyn, als 4×2 oder $2^2 \times 2$ d. i. 8 und $a \times a \times a$ so viel $a^2 \times a$. Wir können also erfahren, aus was für Theilen die Cubikzahl einer binomischen Wurzel bestehet, wenn wir sie in das Quadrat derselben multipliciren. Es bedeute daher wiederum $a' + b^\circ$ jede mögliche zweytheilige Wurzel; so ist das Quadrat derselben $a''^2 + 2\,a'b + b^{\circ 2}$ (§. 70.), welches wir nun durch die Wurzel $a' + b^\circ$ aufs neue multipliciren wollen.

$$\begin{array}{r} a''^2 + 2\,a'b + b^{\circ 2} \\ a' + b^\circ \\ \hline a''^2 b + 2\,a'b^2 + b^{\circ 3} \\ a'''^3 + 2\,a''^2 b + a'b^2 \\ \hline a'''^3 + 3\,a''^2 b + 3\,a'b^2 + b^{\circ 3} = (a+b)^3 \end{array}$$

Aus dieser Rechnung, welche auch diejenigen leicht verstehen werden, die sich die eigentliche Buchstabenrechnung noch nicht völlig bekannt gemacht haben, ersieht man, daß die Cubikzahl einer zweytheiligen Wurzel folgende 4 Stück enthalte: erstlich a^3 d. i. die Cubikzahl des ersten Theils, ferner $3\,a^2 b$, d. i. ein dreyfaches

ches Product aus dem Quadrat des ersten Theils in den andern Theil, drittens $3ab^2$, d. i. ein dreyfaches Product aus dem ersten Theile in das Quadrat des andern Theils, und endlich b^3, d. i. die Cubikzahl des andern Theils. Und da sich der erste Theil auf Zehner, und das Quadrat desselben auf Hunderte beziehet (§. 70), so muß die Cubikzahl a^3 nothwendig zehnfache Hunderte d. i. Tausende bedeuten. Auf eben die Art wird man den Grund leicht einsehen, warum $3a^2b$ Hunderte, $3ab^2$ Zehner, und b^3 Einer bedeuten müssen.

§. 81.

Aus den Eigenschaften der Cubikzahl einer zweytheilichten Wurzel läßt sich ferner leicht einsehen, was für Theile die Cubikzahlen vieltheilichter Wurzeln enthalten. Es heisse also, wie bey den Quadratwurzeln, jede mögliche dreytheilichte Wurzel $a + b + c$ und die Summe der ersten beyden Theile S, so ist klar:

$$\begin{array}{r} a + b = S \\ c = c \\ \hline a + b + c = S + c \text{ (§. 13.)} \end{array}$$

$$(a + b + c)^3 = (S + c)^3$$

$$(S + c)^3 = S^3 + 3S^2c + 3Sc^2 + c^3 \text{ (§. 80.)}$$

$$(a + b + c)^3 = S^3 + 3S^2c + 3Sc^2 + c^3 \text{ (§. 11.)}$$

$$S^3 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ (§. 80.)}$$

Folglich $(a + b + c)^3 =$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3S^2c + 3Sc^2 + c^3 \text{ (§. 9.)}$$

d. i. die Cubikzahl einer dreytheilichten Wurzel besteht aus der Cubikzahl der ersten Theils, aus dem drey-

dreyfachen Producte von dem Quadrate des ersten Theils in den andern Theil, aus dem dreyfachen Producte von dem ersten Theile in das Quadrat des andern Theils, aus der Cubikzahl des andern Theils, aus dem dreyfachen Producte von der Quadratzahl der Summe der ersten beyden Theile in den dritten, aus dem dreyfachen Producte von der Summe der ersten beyden Theile in das Quadrat des dritten Theils, und aus der Cubikzahl des dritten Theils. Nimmt man nun an, daß der erste Theil a Hunderte bedeutet, so muß sein Quadrat hundertfache Hunderte oder Zehntausende (§. 74.), und folglich die Cubikzahl davon Millionen bedeuten; weil man die Cubikzahl durch die Multiplication der Quadratzahl in die Wurzel erhält, und Zehntausende multiplicirt durch Hunderte Millionen geben müssen. Es würde zu weitläuftig seyn, wenn ich zeigen wollte, auf was für eine Einheit sich die übrigen Theile der Cubikzahl beziehen müssen, da dieses ein jeder von selbst finden wird, der das vorhergehende verstanden hat. Wenn man sich auf die vorige Art eine viertheilichte und überhaupt jede polynomische Wurzel als eine zweytheilichte vorstellt; so wird man von der Allgemeinheit des Satzes überzeugt werden, daß die Cubikzahl einer jeden vieltheilichten Wurzel die Cubikzahl eines jeden Theiles, dreyfache Producte von dem Quadrate des ersten Theils in den andern, und dem Quadrate des andern Theils in den ersten, ferner lauter dreyfache Producte von dem Quadrate der Summe der vorhergehenden Theil ein jeden folgenden, und von dem Quadrate eines jeden folgenden Theils in die Summe der vorhergehenden Theile enthält.

§. 82.

Die eintheilichten Wurzeln aus vollkommnen Cubikzahlen lassen sich leicht finden, wenn man sich ein Täfelchen macht, wie das folgende ist, worinnen die Cubikzahlen aller einfachen Zahlen enthalten sind, und welches aus dem oben angeführten Quadrattäfelchen (§. 72.) entstehet, wenn man jede einfache Zahl in ihr Quadrat multipliciret.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Will man also z. E. die Wurzel aus 343 wissen, so sucht man diese Zahl in der dritten Reihe; die darüber in der ersten Reihe befindliche Zahl 7 muß die Cubikwurzel seyn. Dieses Täfelchen braucht man auch, um die Wurzeln zu entdecken, die aus 2 oder mehr Theilen bestehen, wie gleich gezeigt werden soll.

§. 83.

Wir werden in der Folge, um die zusammengesetzten Wurzeln zu suchen, die gegebenen Cubikzahlen von der Rechten gegen die Linke zu in Classen theilen, und jeder Classe drey Zifern geben. Der Grund davon ist dieser. Man erwähle sich eine Reihe Zahlen, wovon die folgende allemal zehnmal grösser ist, als die vorhergehende, und mache von jeder die Cubikzahl; z. E.

$1^3 = 1$
$10^3 = 1000$
$100^3 = 1000000$
$1000^3 = 1000000000$
$10000^3 = 1000000000000$

so wird man finden, daß die folgenden Cubikzahlen allezeit tausendmal grösser sind, und folglich aus 3 Figuren mehr bestehen, als die vorhergehenden, wenn die Wurzel zehnmal grösser ist, oder eine Figur mehr hat, als die vorhergehende Wurzel. Man kann also wissen, wie viel einzelne Theile eine zu suchende Wurzel enthält, wenn man untersucht, wie vielmal man 3 Figuren in einer gegebenen Cubikzahl abschneiden kann.

§. 84.

Wollte man also aus einer gegebenen Zahl, z. E. aus 46656, die Cubikwurzel ziehen, welche nach §. 83. zweytheilicht ist, so müßte man folgende Rechnung anstellen:

$46|656 \left(\begin{matrix} ab \\ 36 \end{matrix}\right.$

$a''' = 27$

$19|656 = 3a^2b'' + 3a'b^2 + b^3°$

$3a^2 = (27)$
$3a^2b'' = 162$
$3a'b^2 = 324$
$b^3° = 216$

19656

0

Probe
36
36
216
108
1296
36
7776
3888
46656

Nam-

Nämlich nach geschehener Abtheilung der gegebenen Zahl in Classen ist in dem Täfelchen (§. 82.) die Cubikzahl gesucht worden, welche den 46 Tausenden am nächsten kömmt; weil in den Tausenden die Cubikzahl des ersten Theils einer binomischen Wurzel stecken muß (§. 80.). Ist nun 27''' die Cubikzahl von a, oder vom ersten Theil, so muß der erste Theil selbst die Wurzel von dieser Zahl, d. i. 3 Zehner seyn; und da die ganze Cubikzahl die Theile $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ enthält, so muß der Ueberrest, wenn man die Cubikzahl des ersten Theils, d. i. in diesem Falle 27''' von der Cubikzahl abzieht, aus den Theilen $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ bestehen. Wird $3a^2b$ durch $3a^2$ dividirt, so ist der Quotient b (§. 19.). Man findet daher den andern Theil der Wurzel, wenn man die Zahl, worinnen $3a^2b$ zu suchen ist, d. i. die Hunderte (§. 80.) mit dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils dividirt. Das Quadrat von 3 ist 9, und dieses dreymal genommen 27, womit also 196 Hunderte dividirt worden sind. Der eigentliche Quotient ist zwar 7; dieser aber kann deswegen nicht der andere Theil der Wurzel seyn, weil alsdenn

$$\begin{array}{rl} 3\,a^2b'' = & 189'' \\ 3\,a'b^2 = & 441' \\ b^3 = & 3430 \\ \hline & 23653 \end{array}$$

und folglich diese drey Stücke zusammen genommen grösser seyn würden, als die obige Zahl 19656, in denen sie enthalten seyn müssen. Hieraus ergiebt sich also, daß der andere Theil der Wurzel eine klei-

nere Zahl als 7, nämlich 6 seyn muß. Dieser andere Theil 6, welcher durch den Buchstaben b angezeigt wird, ist in den Divisor $27 = 3a^2$ multiplicirt worden, um $3a^2b$ zu erhalten. Das Product 162 muß also unter die Hunderte gesetzt werden, weil es Hunderte bedeutet (§. 80.). Das Quadrat von 6 ist 36, dieses durch den ersten Theil der Wurzel, nämlich durch 3 Zehner multiplicirt, giebt 108 Zehner, und dreymal genommen, 324 Zehner, d. i. $3a^1b^2$, welche daher eine Stelle weiter gegen die rechte Hand zugesetzt worden sind. Die Cubikzahl von 6, d. i. hier von 6 Einern macht 216 Einer, die also noch eine Stelle weiter gegen die Rechte zu kommen müssen. Die Summe von diesen 3 Stücken beträgt 19656 und also völlig so viel als die obige Zahl 19656; woraus man sehen kann, daß 6 kein zu grosser Theil und 46656 eine vollkommne Cubikzahl ist. Das Quadrat von 36 ist 1296, und das Product aus 1296 in 36 der gegebenen Cubikzahl gleich; welches die Probe ist, daß man die wahre Wurzel gefunden hat.

§. 85.

Von den polynomischen oder vieltheiligen Cubikwurzeln ist eben das zu erinnern, was von den polynomischen Quadratwurzeln gesagt worden ist. Man findet sie, wie die binomischen, wenn man nur, nachdem man die ersten beyden Theile erhalten hat, die Summe derselben als eine einzige Zahl ansiehet, und die Rechnung auf die vorige Art fortsetzet. Nur muß man bey einer dreytheilichten Wurzel die Cubikzahl des ersten Theils unter den Millionen, (§. 81.) bey den viertheilichten Wurzeln unter den tausendfachen Millionen u. s. f. suchen, wie ein jeder von selbst einsehen wird, wenn er nur erwägt, daß bey einer

dreytheiligen Wurzel der erste Theil Hunderte, und bey einer viertheilichten Wurzel der erste Theil Tausende bedeutet. Folgende Regeln, nach denen man vieltheilichte Wurzeln sucht, werden also keine weitere Erläuterung nöthig haben, und ihre Anwendung wird sich aus dem beygefügten Beyspiele leicht ersehen lassen.

1. Man theile von der Rechten gegen die Linke die gegebene Cubikzahl in Classen, und gebe jeder Classe 3 Zifern.
2. Man suche die Zahl, welche in der äussersten Classe zur Linken stehet, in dem Cubiktäfelchen, und nehme daraus die nächste kleinere Cubikzahl, wofern man sie selbst nicht darinnen antrift, und ziehe sie von den Zifern ab, welche die erste Classe enthält. Die Wurzel von dieser nächst kleinern Cubikzahl ist der erste Theil der gesuchten Wurzel.
3. Zu dem Ueberreste setze man die drey Zifer der folgenden Classe, multiplicire das Quadrat des ersten Theils mit 3, schreibe dieses Product dergestalt, daß seine niedrigste Zifer unter die höchste Zifer der folgenden Classe zu stehen kömmt, und schliesse es in Häkchen ein, oder streiche es aus, damit man es im Addiren nicht für einen Theil ansehe.
4. Mit diesem dreyfachen Quadrate des ersten Theils dividire man die darüber stehende Zahl, so erhält man den zweyten Theil der Wurzel.
5. Diesen zweyten Theil der Wurzel multiplicire man in den vorigen Divisor, d. i. in das dreyfache Quadrat des ersten Theils, und schreibe das Product darunter.

6. Hier-

6. Hierauf multiplicire man das Quadrat des andern Theils in den ersten Theil, und nehme dieses Product dreymal, oder welches einerley ist, man multiplicire das Quadrat des andern Theils mit dem dreyfachen ersten Theile, und schreibe das Product unter das vorige, doch eine Stelle weiter zur Rechten.

7. Hierunter setze man, und zwar wieder eine Stelle weiter zur Rechten, die Cubikzahl des andern Theils; addire diese drey Stücke, und ziehe die Summe von der obigen Zahl ab. Ist die Summe grösser, als die Zahl, aus welcher sie subtrahirt werden soll, so hat man einen zu grossen Theil genommen, und muß diese Rechnung ändern.

8. Nunmehr sehe man die gefundenen ersten beyden Theile als eine einzige Zahl an, multiplicire sie in sich selbst, nehme dieses Quadrat dreymal, und schreibe dasselbe, nachdem man die folgende Classe herunter gerückt hat, dergestalt, daß seine niedrigste Zifer unter die höchste Zifer der folgenden Classe zu stehen komme.

9. Mit diesem dreyfachen Quadrate von der Summe der ersten beyden Theile dividire man die darüber stehende Zahl, so ist der Quotient der dritte Theil der Wurzel.

10. Den dritten Theil der Wurzel multiplicire man in den vorigen Divisor, und schreibe das Product gerade unter ihn.

11. Das Quadrat des dritten Theils multiplicire man in die dreyfache Summe der beyden vorhergehenden Theile, und schreibe dieses Product unter das vorige eine Stelle weiter gegen die rechte Hand.

12. Hierzu setze man noch, und zwar wieder eine Stelle weiter gegen die rechte Hand, die Cubikzahl des dritten Theils, addire diese drey Stücke, und ziehe die Summe von der obern Zahl ab.

13. Enthält die Wurzel noch mehr Theile, so rücke man die folgende Classe herunter, betrachte die drey gefundenen Theile wiederum als eine einzige Zahl, multiplicire sie in sich selbst, und nehme dieses Quadrat dreymal. Hierauf verfahre man wie vorhin, und setze die Rechnung so lange fort, bis man alle Theile der Wurzel gefunden hat.

Der Grund von diesen Regeln ist §. 80. §. 81. und §. 83. enthalten.

Exempel.

Es sey die Cubikwurzel aus 279726264 zu suchen.

279|726|264 (654 (a b c)

$a^3 = 216$

63|726

(108)

$3a^2b = 540$

$3ab^2 = 450$

$b3 = 125$

58625

5101|264

(12675)

$3\,S^2c = 50700$

$3\,Sc^2 = 3120$

$c^3 = 64$

5101264

0

$b^2 = 5^2 = 25$

$3a = 3 \times 6 = 18$

200

25

$3ab^2 = 450$

$S = 65$

65

325

390

$S^2 = 4225$

$3\,S^2 = 12675$

$3S = 3 \times 65 = 195$

$c^2 = 4^2 = 16$

1170

195

$3\,Sc^2 = 3120$

Probe

Probe

654
654

2616
3270
3924

427716
654

1710864
2138580
2566296

279726264

§. 86.

Brüche werden zu Cubikzahlen erhoben, wenn man sowohl von dem Zähler, als auch von dem Nenner die Cubikzahl macht. Denn vermöge der Definition ist die Cubikzahl von einem Bruche, z. E. von $\frac{3}{4}$, das Quadrat von $\frac{3}{4}$ multiplicirt in $\frac{3}{4}$, d. i. $\frac{3^2}{4^2} \times \frac{3}{4}$ oder $\frac{3^3}{4^3}$ (§. 58.), und, wenn man die wirklichen Cubikzahlen nimmt, $\frac{27}{64}$. Ist also der Bruch $\frac{27}{64}$, welcher die Cubikzahl von $\frac{3}{4}$ vorstellt, aus der Cubikzahl von dem Zähler und Nenner dieses letztern Bruchs entstanden; so muß man nothwendig die Cubikwurzel von $\frac{27}{64}$ und von einem jeden Bruche erhalten, wenn man sowohl aus seinem Zähler, als auch aus seinem Nenner die Cubikwurzel sucht. Wenden wir diese Sätze nun auf diejenige Gattung von Brüchen an, die man Decimalbrüche nennt; so wird folgen, daß die Cubikwurzel eines solchen Bruchs

sich auf Zehntheile beziehen oder zum Nenner 10 haben muß, wenn die Cubikzahl 1000 Theile bedeutet; daß ferner die Wurzel zum Nenner 1000 haben wird, wenn der Nenner bey der Cubikzahl eine Million ist, und daß also überhaupt im Nenner der Cubikzahl eines Decimalbruchs dreymal mehr Nullen vorkommen müssen, als in dem Nenner der Wurzel. Denn es sey z. E. die Wurzel $\frac{3}{10}$; so muß die Cubikzahl $\frac{3 \times 3 \times 3}{10 \times 10 \times 10}$ d. i. $\frac{27}{1000}$ seyn. Es sey ferner die Wurzel $\frac{3}{100}$, so muß die Cubikzahl $\frac{3 \times 3 \times 3}{100 \times 100 \times 100}$ d. i. $\frac{27}{1000000}$ seyn. u. s. w.

§. 87.

Verwandelt man unvollkommne Cubikzahlen in Decimalbrüche, deren Nenner vollkommne Cubikzahlen sind; so läßt sich die Wurzel derselben so weit finden, daß der dabey begangene Fehler für unerheblich gehalten werden kann. Je grösser man den Nenner annimmt, desto genauer wird sich auch die Wurzel bestimmen lassen. Es sey z. E. die Cubikwurzel aus 18 zu suchen. Weil nun $\frac{18 \times 1000}{1000}$ oder $\frac{18000}{1000}$ so viel ist als 18 (§. 19); so muß $\frac{18000}{1000}$ und 18 einerley Wurzel haben. Die Wurzel aber aus $\frac{18000}{1000}$ würde man erhalten, wenn man sowohl aus dem

dem Zähler 18000, als auch aus dem Nenner 1000 die Wurzel suchte (§. 86.). Die Wurzel aus dem Nenner ist 10; man hat daher weiter nichts zu thun, als die Wurzel aus dem Zähler 18000 zu suchen, und dieselbe als den Zähler eines Bruchs anzusehen, dessen Nenner 10 ist.

```
18|000(26
 8
---
10|000
(12)
 72
 216
 216
-----
 9576
-----
  424
```

Da nun vermöge dieser Rechnung die Wurzel aus 18000 ohngefehr 26 ist; so muß die Wurzel aus

18000 — 26 — 6

—— d. i. aus 18 ohngefehr — oder 2 — seyn.

1000 — 10 — 10

Wollte man diese Wurzel noch genauer haben, so müßte man die Zahl 18 in einen Decimalbruch mit einem grössern Nenner, z. E. in 1000000 Theile verwandeln, in welchem Falle die Cubikwurzel 100 Theile bedeuten würde (§ 86.). Statt 18 nehme man also den gleichgeltenden Bruch $\frac{18000000}{1000000}$ und suche aus dem Zähler die Wurzel; denn aus dem Nenner ist sie 100, wie man ohne weitläuftige Rechnung sehen kann.

18|000|000(262
8

10|000
(12)
72
216
216

9576

424|000
(2028)
4056
312
8

408728

15272

Probe
262
262

524
1572
524

68644
262

137288
411864
137288

17984728
15272

18000000

Hieraus ist klar, daß die Wurzel aus 18 ungefehr so viel betragen muß, als $\frac{2}{1}\frac{62}{00}$ oder 2, 62, welche Zahl um $\frac{2}{1\,00}$ Theile grösser ist, als die vorige 2, 6. Woraus man also sehen kann, daß man auch hier die Irrationalwurzeln desto genauer erhält, je grösser man den Nenner des Decimalbruchs annimmt, in welchen man die unvollkommne Cubikzahl verwandelt.

Sechstes

Sechstes Capitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 88.

Die Vergleichung einer Zahl mit einer andern von eben der Art in Ansehung ihrer Grösse nennt man ein **Verhältniß** (ratio). Die Zahlen selbst, die man mit einander vergleicht, heissen Glieder des **Verhältnisses** (termini rationis), und zwar diejenige, die man zuerst setzt, das **Vorderglied**, (terminus antecedens) und die andre das **Hinterglied** (terminus consequens). Man kann aber die Zahlen in Ansehung ihrer Grösse auf zweyerley Art mit einander vergleichen. Nämlich man untersucht entweder, um wie viel Einheiten die eine Zahl grösser ist, als die andere; oder wie vielmal die eine grösser ist, als die andre. Die erste Art der Vergleichung, da man fragt, wie viel Einheiten die eine Zahl mehr oder weniger enthält, als die andre, welches man durch die Subtraction findet, nennt man ein **arithmetisches Verhältniß** (ratio arithmetica), weil dergleichen Verhältnisse nur in den arithmetischen Wissenschaften vorkommen. Das Zeichen derselben ist ein Punkt oder ein Querstrich, z. E. 8 . 5 oder 8 — 5. Die Zahl, welche man nach der Vergleichung erhält, und aus welcher man sehen kann, um wie viel Einheiten das eine Glied grösser oder kleiner ist, als das andre, z. E. in dem vorigen Beyspiele die Zahl 3, wird, wie bey der Subtraction, der **Unterschied** oder die **Differenz** genannt.

Die andre Art der Vergleichung, wo gefragt wird, wie vielmal die eine Zahl grösser oder kleiner ist, als die andre, welches man durch die Division erfährt, heißt ein **geometrisches Verhältniß** (ratio geometrica) und wird durch zwey übereinanderstehende Puncte angedeutet. Z. E. 18 : 9. Das Beywort geometrisch wird auch oft weggelassen, weil man bey den ältern Schriftstellern nur diese Art der Verhältnisse findet. Der Quotient, aus welchem man ersieht, wie vielmal das eine Glied in dem andern enthalten ist, z. E. in dem vorigen Beyspiele 2, wird der **Exponent** oder **Name des Verhältnisses** (exponens rationis) genannt.

§. 89.

Aus der Gleichheit oder Aehnlichkeit zweyer Verhältnisse einer Art entstehet eine **Proportion**, welche man **arithmetisch** nennt, wenn sie aus arithmetischen Verhältnissen, und **geometrisch**, wenn sie aus geometrischen Verhältnissen bestehet. Das gewöhnliche Zeichen der Proportionen ist das Zeichen der Gleichheit, welches zwischen die Verhältnisse gesetzt wird. Z. E. 8 . 3 = 9 . 4 oder 8 — 3 = 9 — 4 bedeutet eine arithmetische, und 2 : 14 = 3 : 21 eine geometrische Proportion. Statt des Zeichens der Gleichheit setzen einige bey den arithmetischen Proportionen drey Puncte ∴ und bey den geometrischen vier Puncte ∷ Beyde Proportionen pflegt man also zu lesen: **wie sich verhält die erste Zahl zu der andern, so verhält sich auch die dritte zu der vierten.** Aus den angeführten Erklärungen aber wird ein jeder schon selbst einsehen, daß diese Worte bey den geometrischen Proportionen

eine

ganz andre Bedeutung haben, als bey den arith-
Wschen, Bey den arithmetischen Proportionen
len sie so viel sagen: Um wie viel Einheiten
erste Zahl grösser oder kleiner ist, als die
dere, um eben so viel Einheiten ist auch
e dritte Zahl grösser oder kleiner als die
vierte. Bey den geometrischen aber muß man sie so erklären: so vielmal die erste Zahl in der andern enthalten ist, so vielmal muß auch die dritte Zahl in der vierten enthalten seyn, oder, so vielmal die erste Zahl die andre enthält, so vielmal muß auch die dritte die vierte enthalten. Was hier von den Zahlen gesagt wird, das gilt auch von den Grössen überhaupt, die man sowohl arithmetisch als auch geometrisch mit einander vergleichen kann, wofern sie nur von einer Art sind; daher wir auch im folgenden Verhältnisse und Proportionen durch Buchstaben ausdrücken werden.

§. 90.

Sowohl die arithmetischen, als auch die geometrischen Proportionen werden **stetig** genannt (proportiones continuae), wenn das zweyte und dritte Glied einerley ist, **unstetig** aber, (proportiones discretae) wenn diese mittlern Glieder verschieden sind. Z. E. 10 : 20 = 20 : 40 ist eine stetige geometrische, 10 . 7 = 7 . 4 eine stetige arithmetische; 17 . 10 = 15 . 8 eine unstetige arithmetische, und 9 : 3 = 18 : 6 eine unstetige geometrische Proportion. Die stetigen arithmetischen Proportionen werden auch folgendergestalt:

∴ 10.7.4.

und die stetigen geometrischen Proportionen also geschrieben:

∴ 10.20.40.

§. 91.

Die andre Art der Vergleichung, wo gefragt wird, wie vielmal die eine Zahl grösser oder kleiner ist, als die andre, welches man durch die Division erfährt, heißt ein **geometrisches Verhältniß** (ratio geometrica) und wird durch zwey übereinander stehende Puncte angedeutet. Z. E. 18 : 9. Das Beywort geometrisch wird auch oft weggelassen, weil man bey den ältern Schriftstellern nur diese Art der Verhältnisse findet. Der Quotient, aus welchem man ersieht, wie vielmal das eine Glied in dem andern enthalten ist, z. E. in dem vorigen Beyspiele 2, wird der **Exponent** oder **Name des Verhältnisses** (exponens rationis) genannt.

§. 89.

Aus der Gleichheit oder Aehnlichkeit zweyer Verhältnisse einer Art entstehet eine **Proportion**, welche man **arithmetisch** nennt, wenn sie aus arithmetischen Verhältnissen, und **geometrisch**, wenn sie aus geometrischen Verhältnissen bestehet. Das gewöhnliche Zeichen der Proportionen ist das Zeichen der Gleichheit, welches zwischen die Verhältnisse gesetzt wird. Z. E. 8 . 3 = 9 . 4 oder 8 — 3 = 9 — 4 bedeutet eine arithmetische, und 2 : 14 = 3 : 21 eine geometrische Proportion. Statt des Zeichens der Gleichheit setzen einige bey den arithmetischen Proportionen drey Puncte ∴ und bey den geometrischen vier Puncte ∷ Beyde Proportionen pflegt man also zu lesen: **wie sich verhält die erste Zahl zu der andern, so verhält sich auch die dritte zu der vierten.** Aus den angeführten Erklärungen aber wird ein jeder schon selbst einsehen, daß diese Worte bey den geometrischen Proportionen

eine

eine ganz andre Bedeutung haben, als bey den arithmetischen. Bey den arithmetischen Proportionen wollen sie so viel sagen: Um wie viel Einheiten die erste Zahl grösser oder kleiner ist, als die andere, um eben so viel Einheiten ist auch die dritte Zahl grösser oder kleiner als die vierte. Bey den geometrischen aber muß man sie so erklären: so vielmal die erste Zahl in der andern enthalten ist, so vielmal muß auch die dritte Zahl in der vierten enthalten seyn, oder, so vielmal die erste Zahl die andre enthält, so vielmal muß auch die dritte die vierte enthalten. Was hier von den Zahlen gesagt wird, das gilt auch von den Grössen überhaupt, die man sowohl arithmetisch als auch geometrisch mit einander vergleichen kann, wofern sie nur von einer Art sind; daher wir auch im folgenden Verhältnisse und Proportionen durch Buchstaben ausdrücken werden.

§. 90.

Sowohl die arithmetischen, als auch die geometrischen Proportionen werden **stetig** genannt (proportiones continuae), wenn das zweyte und dritte Glied einerley ist, **unstetig** aber, (proportiones discretae) wenn diese mittlern Glieder verschieden sind. Z. E. 10 : 20 = 20 : 40 ist eine stetige geometrische, 10 . 7 = 7 . 4 eine stetige arithmetische; 17 . 10 = 15 . 8 eine unstetige arithmetische, und 9 : 3 = 18 : 6 eine unstetige geometrische Proportion. Die stetigen arithmetischen Proportionen werden auch folgendergestalt:

∴ 10.7.4.

und die stetigen geometrischen Proportionen also geschrieben:

∴ 10.20.40.

Die andre Art der Vergleichung, wo gefragt wird, wie vielmal die eine Zahl grösser oder kleiner ist, als die andre, welches man durch die Division erfährt, heißt ein **geometrisches Verhältniß** (ratio geometrica) und wird durch zwey übereinander stehende Puncte angedeutet. Z. E. 18 : 9. Das Beywort geometrisch wird auch oft weggelassen, weil man bey den ältern Schriftstellern nur diese Art der Verhältnisse findet. Der Quotient, aus welchem man ersieht, wie vielmal das eine Glied in dem andern enthalten ist, z. E. in dem vorigen Beyspiele 2, wird der **Exponent** oder **Name des Verhältnisses** (exponens rationis) genannt.

§. 89.

Aus der Gleichheit oder Aehnlichkeit zweyer Verhältnisse einer Art entstehet eine **Proportion**, welche man **arithmetisch** nennt, wenn sie aus arithmetischen Verhältnissen, und **geometrisch**, wenn sie aus geometrischen Verhältnissen bestehet. Das gewöhnliche Zeichen der Proportionen ist das Zeichen der Gleichheit, welches zwischen die Verhältnisse gesetzt wird. Z. E. 8 . 3 = 9 . 4 oder 8 — 3 = 9 — 4 bedeutet eine arithmetische, und 2 : 14 = 3 : 21 eine geometrische Proportion. Statt des Zeichens der Gleichheit setzen einige bey den arithmetischen Proportionen drey Puncte ∴ und bey den geometrischen vier Puncte ∷ Beyde Proportionen pflegt man also zu lesen: **wie sich verhält die erste Zahl zu der andern, so verhält sich auch die dritte zu der vierten.** Aus den angeführten Erklärungen aber wird ein jeder schon selbst einsehen, daß diese Worte bey den geometrischen Proportionen

eine

eine ganz andre Bedeutung haben, als bey den arithmetischen. Bey den arithmetischen Proportionen wollen sie so viel sagen: Um wie viel Einheiten die erste Zahl grösser oder kleiner ist, als die andere, um eben so viel Einheiten ist auch die dritte Zahl grösser oder kleiner als die vierte. Bey den geometrischen aber muß man sie so erklären: so vielmal die erste Zahl in der andern enthalten ist, so vielmal muß auch die dritte Zahl in der vierten enthalten seyn, oder, so vielmal die erste Zahl die andre enthält, so vielmal muß auch die dritte die vierte enthalten. Was hier von den Zahlen gesagt wird, das gilt auch von den Grössen überhaupt, die man sowohl arithmetisch als auch geometrisch mit einander vergleichen kann, wofern sie nur von einer Art sind; daher wir auch im folgenden Verhältnisse und Proportionen durch Buchstaben ausdrücken werden.

§. 90.

Sowohl die arithmetischen, als auch die geometrischen Proportionen werden **stetig** genannt (proportiones continuae), wenn das zweyte und dritte Glied einerley ist, **unstetig** aber, (proportiones discretae) wenn diese mittlern Glieder verschieden sind. Z. E. $10 : 20 = 20 : 40$ ist eine stetige geometrische, $10 . 7 = 7 . 4$ eine stetige arithmetische; $17 . 10 = 15 . 8$ eine unstetige arithmetische, und $9 : 3 = 18 : 6$ eine unstetige geometrische Proportion. Die stetigen arithmetischen Proportionen werden auch folgendergestalt:

$\dot{\dot{-}}$ 10.7.4.

und die stetigen geometrischen Proportionen also geschrieben:

$\dot{-}\dot{-}$ 10.20.40.

§. 91.

Die andre Art der Vergleichung, wo gefragt wird, wie vielmal die eine Zahl grösser oder kleiner ist, als die andre, welches man durch die Division erfährt, heißt ein **geometrisches Verhältniß** (ratio geometrica) und wird durch zwey übereinander stehende Puncte angedeutet. Z. E. 18 : 9. Das Beywort geometrisch wird auch oft weggelassen, weil man bey den ältern Schriftstellern nur diese Art der Verhältnisse findet. Der Quotient, aus welchem man ersieht, wie vielmal das eine Glied in dem andern enthalten ist, z. E. in dem vorigen Beyspiele 2, wird der **Exponent** oder **Name des Verhältnisses** (exponens rationis) genannt.

§. 89.

Aus der Gleichheit oder Aehnlichkeit zweyer Verhältnisse einer Art entstehet eine **Proportion**, welche man **arithmetisch** nennt, wenn sie aus arithmetischen Verhältnissen, und **geometrisch**, wenn sie aus geometrischen Verhältnissen bestehet. Das gewöhnliche Zeichen der Proportionen ist das Zeichen der Gleichheit, welches zwischen die Verhältnisse gesetzt wird. Z. E. 8 . 3 = 9 . 4 oder 8 — 3 = 9 — 4 bedeutet eine arithmetische, und 2 : 14 = 3 : 21 eine geometrische Proportion. Statt des Zeichens der Gleichheit setzen einige bey den arithmetischen Proportionen drey Puncte ∴ und bey den geometrischen vier Puncte ∷ Beyde Proportionen pflegt man also zu lesen: **wie sich verhält die erste Zahl zu der andern, so verhält sich auch die dritte zu der vierten.** Aus den angeführten Erklärungen aber wird ein jeder schon selbst einsehen, daß diese Worte bey den geometrischen Proportionen

eine

eine ganz andre Bedeutung haben, als bey den arithmetischen. Bey den arithmetischen Proportionen wollen sie so viel sagen: Um wie viel Einheiten die erste Zahl grösser oder kleiner ist, als die andere, um eben so viel Einheiten ist auch die dritte Zahl grösser oder kleiner als die vierte. Bey den geometrischen aber muß man sie so erklären: so vielmal die erste Zahl in der andern enthalten ist, so vielmal muß auch die dritte Zahl in der vierten enthalten seyn, oder, so vielmal die erste Zahl die andre enthält, so vielmal muß auch die dritte die vierte enthalten. Was hier von den Zahlen gesagt wird, das gilt auch von den Grössen überhaupt, die man sowohl arithmetisch als auch geometrisch mit einander vergleichen kann, wofern sie nur von einer Art sind; daher wir auch im folgenden Verhältnisse und Proportionen durch Buchstaben ausdrücken werden.

§. 90.

Sowohl die arithmetischen, als auch die geometrischen Proportionen werden **stetig** genannt (proportiones continuae), wenn das zweyte und dritte Glied einerley ist, **unstetig** aber, (proportiones discretae) wenn diese mittlern Glieder verschieden sind. Z. E. 10 : 20 = 20 : 40 ist eine stetige geometrische, 10 . 7 = 7 . 4 eine stetige arithmetische; 17 . 10 = 15 . 8 eine unstetige arithmetische, und 9 : 3 = 18 : 6 eine unstetige geometrische Proportion. Die stetigen arithmetischen Proportionen werden auch folgendergestalt:

∴ 10.7.4.

und die stetigen geometrischen Proportionen also geschrieben:

∴ 10.20.40.

sich auf Zehntheile beziehen oder zum Nenner 10 haben muß, wenn die Cubikzahl 1000 Theile bedeutet; daß ferner die Wurzel zum Nenner 1000 haben wird, wenn der Nenner bey der Cubikzahl eine Million ist, und daß also überhaupt im Nenner der Cubikzahl eines Decimalbruchs dreymal mehr Nullen vorkommen müssen, als in dem Nenner der Wurzel. Denn es sey z. E. die Wurzel $\frac{3}{10}$; so muß die Cubikzahl $\frac{3 \times 3 \times 3}{10 \times 10 \times 10}$ d. i. $\frac{27}{1000}$ seyn. Es sey ferner die Wurzel $\frac{3}{100}$, so muß die Cubikzahl $\frac{3 \times 3 \times 3}{100 \times 100 \times 100}$ d. i. $\frac{27}{1000000}$ seyn. u. s. w.

§. 87.

Verwandelt man unvollkommne Cubikzahlen in Decimalbrüche, deren Nenner vollkommne Cubikzahlen sind; so läßt sich die Wurzel derselben so weit finden, daß der dabey begangene Fehler für unerheblich gehalten werden kann. Je grösser man den Nenner annimmt, desto genauer wird sich auch die Wurzel bestimmen lassen. Es sey z. E. die Cubikwurzel aus 18 zu suchen. Weil nun $\frac{18 \times 1000}{1000}$ oder $\frac{18000}{1000}$ so viel ist als 18 (§. 19); so muß $\frac{18000}{1000}$ und 18 einerley Wurzel haben. Die Wurzel aber aus $\frac{18000}{1000}$ würde man erhalten, wenn man sowohl aus dem

dem Zähler 18000, als auch aus dem Nenner 1000 die Wurzel suchte (§. 86.). Die Wurzel aus dem Nenner ist 10; man hat daher weiter nichts zu thun, als die Wurzel aus dem Zähler 18000 zu suchen, und dieselbe als den Zähler eines Bruchs anzusehen, dessen Nenner 10 ist.

```
18|000(26
 8
---
10|000
(12)
 72
 216
 216
---
 9576
---
  424
```

Da nun vermöge dieser Rechnung die Wurzel aus 18000 ohngefehr 26 ist; so muß die Wurzel aus

$$\frac{18000}{1000} \text{ d. i. aus } 18 \text{ ohngefehr } \frac{26}{10} \text{ oder } 2\frac{6}{10} \text{ seyn.}$$

Wollte man diese Wurzel noch genauer haben, so müßte man die Zahl 18 in einen Decimalbruch mit einem grössern Nenner, z. E. in 1000000 Theile verwandeln, in welchem Falle die Cubikwurzel 100 Theile bedeuten würde (§ 86.). Statt 18 nehme man also den gleichgeltenden Bruch $\frac{18000000}{1000000}$ und suche aus dem Zähler die Wurzel; denn aus dem Nenner ist sie 100, wie man ohne weitläuftige Rechnung sehen kann.

18|000|000(262
8

10|000
(12)
72
216
216

9576

424|000
(2028)
4056
312
8

408728

15272

Probe
262
262

524
1572
524

68644
262

137288
411864
137288

17984728
15272

18000000

Hieraus ist klar, daß die Wurzel aus 18 ungefehr so viel betragen muß, als $\frac{2}{1}\frac{6}{0}\frac{2}{0}$ oder 2, 62, welche Zahl um $\frac{2}{1\,0\,0}$ Theile grösser ist, als die vorige 2, 6. Woraus man also sehen kann, daß man auch hier die Irrationalwurzeln desto genauer erhält, je grösser man den Nenner des Decimalbruchs annimmt, in welchen man die unvollkommne Cubikzahl verwandelt.

Sechstes Capitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 88.

Die Vergleichung einer Zahl mit einer andern von eben der Art in Ansehung ihrer Grösse nennt man ein **Verhältniß** (ratio). Die Zahlen selbst, die man mit einander vergleicht, heissen Glieder des **Verhältnisses** (termini rationis), und zwar diejenige, die man zuerst setzt, das **Vorderglied**, (terminus antecedens) und die andre das **Hinterglied** (terminus consequens). Man kann aber die Zahlen in Ansehung ihrer Grösse auf zweyerley Art mit einander vergleichen. Nämlich man untersucht entweder, um wie viel Einheiten die eine Zahl grösser ist, als die andere; oder wie vielmal die eine grösser ist, als die andre. Die erste Art der Vergleichung, da man fragt, wie viel Einheiten die eine Zahl mehr oder weniger enthält, als die andre, welches man durch die Subtraction findet, nennt man ein **arithmetisches Verhältniß** (ratio arithmetica), weil dergleichen Verhältnisse nur in den arithmetischen Wissenschaften vorkommen. Das Zeichen derselben ist ein Punkt oder ein Querstrich, z. E. 8 . 5 oder 8 — 5. Die Zahl, welche man nach der Vergleichung erhält, und aus welcher man sehen kann, um wie viel Einheiten das eine Glied grösser oder kleiner ist, als das andre, z. E. in dem vorigen Beyspiele die Zahl 3, wird, wie bey der Subtraction, der **Unterschied** oder die **Differenz** genannt.

Die andre Art der Vergleichung, wo gefragt wird, wie vielmal die eine Zahl grösser oder kleiner ist, als die andre, welches man durch die Division erfährt, heißt ein **geometrisches Verhältniß** (ratio geometrica) und wird durch zwey übereinander stehende Puncte angedeutet. Z. E. 18 : 9. Das Beywort geometrisch wird auch oft weggelassen, weil man bey den ältern Schriftstellern nur diese Art der Verhältnisse findet. Der Quotient, aus welchem man ersieht, wie vielmal das eine Glied in dem andern enthalten ist, z. E. in dem vorigen Beyspiele 2, wird der **Exponent** oder **Name des Verhältnisses** (exponens rationis) genannt.

§. 89.

Aus der Gleichheit oder Aehnlichkeit zweyer Verhältnisse einer Art entstehet eine **Proportion**, welche man **arithmetisch** nennt, wenn sie aus arithmetischen Verhältnissen, und **geometrisch**, wenn sie aus geometrischen Verhältnissen bestehet. Das gewöhnliche Zeichen der Proportionen ist das Zeichen der Gleichheit, welches zwischen die Verhältnisse gesetzt wird. Z. E. 8 . 3 = 9 . 4 oder 8 — 3 = 9 — 4 bedeutet eine arithmetische, und 2 : 14 = 3 : 21 eine geometrische Proportion. Statt des Zeichens der Gleichheit setzen einige bey den arithmetischen Proportionen drey Puncte ∴ und bey den geometrischen vier Puncte ∷ Beyde Proportionen pflegt man also zu lesen: **wie sich verhält die erste Zahl zu der andern, so verhält sich auch die dritte zu der vierten.** Aus den angeführten Erklärungen aber wird ein jeder schon selbst einsehen, daß diese Worte bey den geometrischen Proportionen

eine

eine ganz andre Bedeutung haben, als bey den arithmetischen, Bey den arithmetischen Proportionen wollen sie so viel sagen: Um wie viel Einheiten die erste Zahl grösser oder kleiner ist, als die andere, um eben so viel Einheiten ist auch die dritte Zahl grösser oder kleiner als die vierte. Bey den geometrischen aber muß man sie so erklären: so vielmal die erste Zahl in der andern enthalten ist, so vielmal muß auch die dritte Zahl in der vierten enthalten seyn, oder, so vielmal die erste Zahl die andre enthält, so vielmal muß auch die dritte die vierte enthalten. Was hier von den Zahlen gesagt wird, das gilt auch von den Grössen überhaupt, die man sowohl arithmetisch als auch geometrisch mit einander vergleichen kann, wofern sie nur von einer Art sind; daher wir auch im folgenden Verhältnisse und Proportionen durch Buchstaben ausdrücken werden.

§. 90.

Sowohl die arithmetischen, als auch die geometrischen Proportionen werden **stetig** genannt (proportiones continuae), wenn das zweyte und dritte Glied einerley ist, **unstetig** aber, (proportiones discretae) wenn diese mittlern Glieder verschieden sind. Z. E. $10 : 20 = 20 : 40$ ist eine stetige geometrische, $10 . 7 = 7 . 4$ eine stetige arithmetische; $17 . 10 = 15 . 8$ eine unstetige arithmetische, und $9 : 3 = 18 : 6$ eine unstetige geometrische Proportion. Die stetigen arithmetischen Proportionen werden auch folgendergestalt:

$\dot{\dot{\dot{-}}}$ 10.7.4.

und die stetigen geometrischen Proportionen also geschrieben:

$\dot{\dot{-}}\dot{\dot{-}}$ 10.20.40.

§. 91.

§. 91.

Wir wollen nunmehr die Eigenschaften der arithmetischen Verhältnisse und Proportionen kürzlich untersuchen, die sich leicht aus der gegebenen Erklärung derselben werden herleiten lassen. Zuerst ist klar aus §. 88, daß man das grössere Glied eines arithmetischen Verhältnisses erhält, wenn man das kleinere Glied und die Differenz addirt. Ist z. E. 7 das kleinere Glied, und 8 die Differenz, so muß 7 + 8 oder 15 das grössere Glied seyn; oder allgemein betrachtet, ist a das kleinere Glied, und d die Differenz, so muß a + d das grössere Glied seyn. Aus eben dem Grunde wird auch der Ungeübteste leicht einsehen, daß man das kleinere Glied erhält, wenn man die Differenz von dem grössern abzieht.

§. 92.

Sollen zwey arithmetische Verhältnisse eine Proportion ausmachen, so müssen sie, vermöge der Erklärung, einander gleich seyn (§. 89.), d. h. beyde Verhältnisse müssen nicht nur einerley Differenz geben, sondern die Ordnung der Glieder muß auch in beyden einerley seyn, nämlich, wenn in dem ersten Verhältnisse das Vorderglied grösser ist, als das Hinterglied, so muß auch in dem andern Verhältnisse das Vorderglied grösser seyn, als das Hinterglied, und so auch umgewendet. Wir wollen uns nunmehr jede mögliche arithmetische Proportion durch Buchstaben vorstellen, um uns genau von der Allgemeinheit der Sätze zu überzeugen, die von diesen Proportionen zu merken sind. Es heisse das kleinere Glied des ersten Verhältnisses a, und das kleinere Glied

des

des andern Verhältnisses b, die Differenz d, die in beyden Verhältnissen einerley seyn muß, weil sie eine Proportion ausmachen sollen. Auf diese Art wird das grössere Glied des ersten Verhältnisses a + d, und das grössere Glied des andern Verhältnisses b + d seyn (§. 91.); woraus folgende Proportion entstehet:

$$a . a + d = b . b + d$$

Nimmt man nun von dieser Proportion, die jede mögliche arithmetische Proportion vorstellen kann, das erste und vierte Glied, ferner das zweyte und dritte Glied in eine Summe; so wird man finden, daß beyde Summen einander gleich sind, weil sie beyde aus den Grössen a, b, d, bestehen. Hieraus erhellt also der Satz: **in einer jeden arithmetischen Proportion ist die Summe aus dem ersten und letzten Gliede der Summe aus dem zweyten und dritten Gliede gleich.** Z. E.

$$15 . 13 = 10 . 8$$

Die Summe von 15 und 8 ist 23 und von 13 und 10 auch 23, und so in andern dergleichen Fällen mehr. In einer stetigen Proportion ist das zweyte und dritte Glied einerley (§. 90.), und folglich die Summe aus dem ersten und letzten Gliede so viel, als das mittelste Glied zweymal genommen. Z. E.

$$16 . 10 = 10 . 4$$

Hier muß die Summe von 16 + 4 so groß seyn, als 10 zweymal genommen. Hat man also folgende arithmetische Proportion

$$g . c = c . m$$

so ist

$$g + m = 2c$$

§. 93.

§. 93.

Wenn man in der vorigen Proportion $a . a + d = b . b + d$ (§. 92.) wodurch wir uns jede mögliche Proportion vorgestellt haben, das vierte Glied $b + d$ mit den vorhergehenden Gliedern vergleicht; so wird man finden, daß es so groß ist, als die Summe der mittlern beyden b und $a + d$ weniger dem ersten Glide a. Werden uns also drey Zahlen oder Grössen gegeben, zu denen man die vierte arithmetische Proportionalgrösse finden soll; so dürfen wir nur die beyden mittlern Glieder addiren, und von der Summe das erste Glied abziehen. Z. E. sind die drey gegebenen Zahlen: 19 . 3 . 18; so wäre die gesuchte vierte Zahl $3 + 18 - 19$, d. i. $21 - 19$ oder 2, wovon man sich leicht durch die Probe überzeugen kann; denn

$$19 . 3 = 18 . 2$$

weil in beyden Verhältnissen der Unterschied 16 ist. Soll man also zu den Grössen m, q, f die vierte Proportionalgrösse suchen, so muß dieselbe aus eben dem Grunde $q + f - m$ seyn. Bey einer stetigen Proportion kann man daher aus den ersten beyden Gliedern das letzte bestimmen, wenn man das erste Glied von dem doppelten andern Gliede subtrahirt; weil hier die Summe aus dem andern und dritten Gliede so viel beträgt, als das andre Glied zweymal genommen.

§. 94

Es mache a, b, c eine stetige arithmetische Proportion aus, d. i. es sey

a . b

$$\frac{a \,.\, b = b \,.\, c}{\text{so ist } a + c = 2b} \quad (\S.\ 92.)$$

folglich $\frac{a + c}{2} = \frac{2b}{2} = b$ (§. 18. §. 19.)

Hieraus ersieht man also, daß sich das mittlere Glied bey einer arithmetischen stetigen Proportion finden läßt, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes halbirt. Z. E. es sey das erste Glied einer solchen Proportion die Zahl 13, und das letzte die Zahl 17; so wird das mittelste Glied nothwendig $\frac{13 + 17}{2}$ d. i. $\frac{30}{2}$ oder 15 seyn müssen. Es verhält sich auch in der That

$$13 \,.\, 15 = 15 \,.\, 17.$$

§. 95.

Da bey den geometrischen Verhältnissen die Zahlen dergestalt verglichen werden, daß man untersucht, wie vielmal die eine in der andern enthalten ist, oder wie vielmal die eine Zahl die andre enthält, welches durch den Exponenten angezeigt wird (§. 88.); so ist klar, daß sich ein geometrisches Verhältniß auch als eine Division oder als einen Bruch, und eine Division oder ein Bruch als ein geometrisches Verhältniß betrachten läßt; welches auch die Ursache ist, daß man bey den geometrischen Verhältnissen und Quotienten einerley Zeichen gebraucht. Man kann daher das eine Glied eines geometrischen Verhältnisses als den Dividendum oder als den Zähler eines Bruchs, das andre Glied desselben als den Divisor

oder

oder als den Nenner eines Bruchs, und den Exponenten als den Quotienten ansehen. Hieraus folgt also, daß man das grössere Glied bekommen wird, wenn man das kleinere in den Exponenten multiplicirt, und das kleinere, wenn man das grössere durch den Exponenten dividirt. Nennt man nun das kleinere Glied a und den Exponenten e, so kann man das grössere durch das Product $a \times e$ ausdrücken.

§. 96.

Zwey gleiche oder ähnliche geometrische Verhältnisse machen eine geometrische Proportion aus (§. 89.). Man kann aber geometrische Verhältnisse nicht gleich oder ähnlich nennen, wofern sie nicht einerley Exponenten und einerley Ordnung der Glieder haben. Hieraus folgt also, daß man eine geometrische Proportion in zwey gleiche Quotienten oder Brüche, und zwey gleiche Quotienten oder Brüche in eine geometrische Proportion wird verwandeln können (§. 95.). Verhält sich also d zu g, wie f zu m, so kann man schliessen, daß der Quotient oder Bruch $\frac{d}{g}$ dem Quotienten oder Bruche $\frac{f}{m}$ gleich sey; und wiederum ist der Bruch oder Quotient $\frac{d}{g}$ so groß, als der Bruch oder Quotient $\frac{f}{m}$; so muß der erste Dividendus zu seinem Divisor, oder der erste Zähler zu seinem Nenner, sich eben so verhalten, wie der andre Dividendus zu seinem Divisor, oder wie der andre Zähler zu seinem Nenner.

§. 97.

§. 97.

Wir wollen die beyden kleinern Glieder einer solchen Proportion a und b, den Exponenten aber e nennen, so wird das grössere Glied des ersten Verhältnisses a ⋊ e und das grössere Glied des andern Verhältnisses b ⋊ e (§. 95.) und also die ganze Proportion folgende seyn:

$$a : a \rtimes e = b : b \rtimes e$$

Durch welchen Ausdruck man sich jede mögliche geometrische Proportion vorstellen kann. Multiplicirt man das erste und vierte Glied in einander, so besteht das Product aus den drey Factoren a, b, e, d. i. aus den beyden kleinern Gliedern der Proportion und dem Exponenten. Multiplicirt man das zweyte und dritte Glied in einander; so erhält man ein Product von eben diesen drey Factoren a, e, b; woraus man also sehen kann, daß ein Product aus dem ersten und letzten Gliede einer geometrischen Proportion eben so groß ist, als ein Product aus dem zweyten und dritten Gliede. Verhält sich daher

$$5 : 10 = 3 : 6$$

so ist $5 \rtimes 6 = 10 \rtimes 3$

Wenn ferner $12 : 4 = 6 : 2$

so ist $12 \rtimes 2 = 4 \rtimes 6$

Und weil bey einer stetigen Proportion das zweyte und dritte Glied einerley ist; so muß hier das Product des ersten und letzten Gliedes der Quadratzahl des mittlern Gliedes gleich seyn. Wenn also

$$1 : 5 = 5 : 25$$

so ist $1 \times 25 = 5^2$

Oder wenn überhaupt $c : m = m : g$

so ist $c \times g = m^2$

§. 98.

Wenn vier Grössen eine geometrische Proportion ausmachen, so müssen sie auch noch proportional seyn, wenn man jedes Verhältniß oder die ganze Proportion umwendet. Z. E. wenn

$$16 : 32 = 9 : 18$$

und überhaupt $b : f = m : g$

so muß sich auch verhalten invertendo, wie die Mathematiker zu reden pflegen,

$$32 : 16 = 18 : 9$$

und $f : b = g : m$

oder $18 : 9 = 32 : 16$

und $g : m = f : b$.

Denn der Exponent kann durch diese Versetzung nicht verändert werden, weil jedes Verhältniß die vorigen Glieder behält; und da beyde Verhältnisse umgewandt werden, so muß auch wiederum einerley Ordnung der Glieder, und folglich ähnliche Verhältnisse oder eine Proportion entstehen (§. 96.).

§. 99.

Werden zwey Zahlen oder Grössen mit einerley Zahl oder Grösse multiplicirt, so müssen sich die Producte eben so verhalten, wie die multiplicirten Zahlen oder Grössen. Z. E.

a : b = a × e : b × e
oder 3 : 6 = 3 × 4 : 6 × 4
d. i. 3 : 6 = 12 : 24

Denn das Verhältniß a : b kann man auch als einen Quotienten oder Bruch ansehen (§. 95.). Ein Bruch aber wird in Ansehung seines Werths nicht verändert, wenn man seinen Zähler und Nenner durch einerley Grösse multiplicirt (§. 49.). Folglich ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times e}{b \times e}$$

Und weil zwey gleiche Brüche eine Proportion ausmachen (§. 96.),

a : b = a × e : b × e

§. 100.

Da die grössern Glieder eines geometrischen Verhältnisses durch die Multiplication der kleinern Glieder in den Exponenten entstehen (§. 95.), und die Exponenten in solchen Verhältnissen, die eine Proportion ausmachen, einerley seyn müssen, (§. 96.); so folgt hieraus, daß sich in jeder Proportion das erste Glied zum dritten verhalten muß, wie das zweyte zum vierten; welches man alternando oder permutando schliessen heißt. Es werde, wie §. 97, jede mögliche geometrische Proportion also ausgedrückt:

a : a × e = b : b × e

so ist altern. a : b = a × e : b × e
oder in Zahlen 8 : 24 = 16 : 48
d. i. 8 : 8 × 3 = 16 : 16 × 3 (§. 95.)
folglich 8 : 16 = 8 × 3 : 16 × 3 (§. 99.)
d. i. 8 : 16 = 24 : 48

§. 101.

Man kann daher nicht nur beyde Glieder eines Verhältnisses, oder alle Glieder einer Proportion, sondern auch das erste und dritte, oder das zweyte und vierte Glied durch einerley Grösse multipliciren, und dennoch proportionale Grössen behalten. Z. E. wenn sich verhält

a : b = e : m

---

so ist 1.) a × e : b × e = c : m
2.) a × e : b × e = c × e : m × e
3.) a × e : b = c × e : m
4.) a : b × e = c : m × e

Denn da sich Vermöge der voraussetzung verhält

a : b = c : m
und a : b = a × c : b × e (§. 99.)

---

so folgt 1.) daß a × e : b × e = c : m (§. 11.)
und da c : m = c × e : m × e (§. 99.)

---

so muß auch 2.) a × e : b × e = c × e : m × e (§. 11.)
Ferner weil a : b = c : m

---

altern. a : c = b : m (§. 100.

---

a × e : c × e = b : m (p. membr. 1.)

---

so wird auch alt. 3.) a × e : b = c × e : m
Endlich weil a : c = b : m per hyp.

---

a : c = b × e : m × e (p. mb. 1.)

---

so folgt daß 4.) a : b × e = c : m × e (§. 100.)

§. 102.

§. 102.

Durch den vorigen Satz kann man also die Brüche aus einem Verhältnisse wegschaffen, wenn man die Glieder desselben mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt. Z. E. wenn sich zwey Grössen A und B wie die Zahlen 8 und $\frac{2}{3}$ verhielten, so könnte man schliessen, daß sich diese beyden Grössen auch wie die ganzen Zahlen 24 und 2 verhalten müßten. Denn wenn

$$A : B = 8 : \frac{2}{3}$$

so folgt, daß $A : B = 8 \times 3 : \frac{2}{3} \times 3$ (§. 101.)

d. i. $A : B = 24 : 2$

§. 103.

Werden zwey Grössen durch einerley Grösse dividirt, so müssen sich die Quotienten eben so verhalten, wie die beyden dividirten Grössen. Z. E.

$$a : b = \frac{a}{d} : \frac{b}{d}$$

oder $40 : 80 = \frac{40}{10} : \frac{80}{10}$

d. i. $40 : 80 = 4 : 8$

Denn verwandelt man das Verhältnis a : b in einen Bruch (§. 95.), und dividirt man den Zähler und Nenner dieses Bruchs durch einerley Grösse, z. E. durch d, so muß

$$\frac{a : d}{b : d} = \frac{a}{b} \text{ (§. 49.)}$$

und folglich $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = a : b$ (§. 96.)

§. 104.

Man kann daher nicht nur beyde Glieder eines Verhältnisses, oder alle Glieder einer Proportion, sondern auch das erste und dritte, oder das zweyte und vierte Glied durch einerley Grösse dividiren, und es muß allemal eine neue Proportion entstehen. Wenn also

$$a : b = c : m$$

so verhält sich

1) $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = c : m$

2) $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = \frac{c}{d} : \frac{m}{d}$

3) $\frac{a}{d} : b = \frac{e}{d} : m$

4) $a : \frac{b}{d} = c : \frac{m}{d}$

und in Zahlen, wenn

$$30 : 60 = 18 : 36$$

$$\frac{30}{6} : \frac{60}{6} = 18 : 36$$

d. i. $5 : 10 = 18 : 36$

oder $\frac{30}{6} : \frac{60}{6} = \frac{18}{6} : \frac{36}{6}$

d. i. $5 : 10 = 3 : 6$

oder

oder $\frac{30}{6} : 60 = \frac{18}{6} : 36$

d. i. $5 : 60 = 3 : 36$

oder $30 : \frac{60}{6} = 18 : \frac{36}{6}$

d. i. $30 : 10 = 18 : 6$

Von allen diesen Proportionen ist der Grund folgender. Wenn

$$a : b = c : m$$

und $a : b = \frac{a}{d} : \frac{b}{d}$ (§. 103.)

$$\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = c : m \quad \text{(§. 11.)}$$

$$c : m = \frac{c}{d} : \frac{m}{d} \quad \text{(§. 103.)}$$

---

2) $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = \frac{c}{d} : \frac{m}{d}$

Ferner weil $a : b = c : m$

---

altern. $a : c = b : m$ (§. 100.)

$\frac{a}{d} : \frac{c}{d} = b : m$ (p. memb. 1.)

---

altern. 3) $\frac{a}{d} : b = \frac{c}{d} : m$

Endlich weil $\frac{a : b = c : m}{}$

$$a : b = \frac{c}{d} : \frac{m}{d} \text{ (p. memb. 1.)}$$

altern. 4) $a : \frac{c}{d} = c : \frac{m}{d}$ (§. 100.)

Durch diesen Satz kann man sehr oft Verhältnisse und Proportionen, die aus grossen Zahlen bestehen, in andre verwandeln, die kleinere Zahlen enthalten, wofern sich nur die vorhin genannten Glieder durch einerley Zahl dividiren lassen.

§. 105.

Die Summe des ersten und zweyten Gliedes einer geometrischen Proportion verhält sich zu dem zweyten Gliede, wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zum vierten Gliede. Z. E. wenn

$$\frac{a : b = c : m}{}$$

so folgt, daß $a + b : b = c + m : m$

Denn da man aus einer Proportion zwey gleiche Brüche machen kann, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{m} \text{ (§. 96.)}$$

$$\frac{b}{b} = \frac{m}{m} \text{ (§. 47.)}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{m} + \frac{m}{m} \text{ (§. 13.)}$$

d. i.

d. i. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+m}{m}$ (§. 53.)

folglich $a+b:b = c+m:m$ (§. 96.)

In diesem Falle pflegt man zu sagen, daß man componendo geschlossen habe

Exempel in Zahlen:

$16:4 = 32:8$

comp. $16+4:4 = 32+8:8$

d. i. $20:4 = 40:8$

§. 106.

Den Unterschied der ersten beyden Glieder einer geometrischen Proportion verhält sich zum zweyten Gliede, wie der Unterschied der letzten beyden Glieder zum letzten Gliede. Z. E. wenn

$a:b = c:m$

so verhält sich $a-b:b = c-m:m$

Denn aus der Proportion

$$a : b = c : m$$

folget, daß $\frac{a}{b} = \frac{c}{m}$ (§. 96.)

$$\frac{b}{b} = \frac{m}{m} \text{ (§. 47.)}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{m} - \frac{m}{m} \text{ (§. 14.)}$$

d. i. $$\frac{a - b}{b} = \frac{c - m}{m} \text{ (§. 53.)}$$

Und also $a - b : b = c - m : m$ (§. 96.)

Exempel in Zahlen:

$$25 : 5 = 30 : 6$$

$$25 - 5 : 5 = 30 - 6 : 6$$

d. i. $$20 : 5 = 24 : 6$$

§. 107.

Wenn sich verhält

$$a : b = d : g$$

und $$m : c = f : n$$

so muß auch $a \times m : b \times c = d \times f : g \times n$

Denn

Denn aus der ersten Proportion folgt, daß

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{g} \quad (\S.96.)$$

und aus der andern, daß

$$\frac{m}{c} = \frac{f}{n}$$

$$\frac{a \times m}{b \times c} = \frac{d \times f}{g \times n} \quad (\S.17.)$$

$$\frac{a \times m}{b \times c} = \frac{d \times f}{g \times n} \quad (\S.58.)$$

folglich $a \times m : b \times c = d \times f : g \times n$ (§. 96.)

Exempel in Zahlen:

$3 : 2 = 6 : 4$

$10 : 5 = 14 : 7$

$3 \times 10 : 2 \times 5 = 6 \times 14 : 4 \times 7$

d. i. $30 : 10 = 84 : 28$

§. 108.

Wenn man einerley Proportion zweymal setzt, und die Glieder, die einerley Stelle haben, nach der vorigen Art in einander multiplicirt, so entstehen lauter Quadratzahlen. Z. E.

$$\begin{array}{rcl} a : b & = & d : g \\ a : b & = & d : g \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a \times a : b \times b & = & d \times d : g \times g \\ \text{das ist } a^2 : b^2 & = & d^2 : g^2 \end{array}$$

Hieraus ist also klar: **wenn vier Grössen eine geometrische Proportion ausmachen, so müssen auch ihre Quadratzahlen proportional seyn.**

§. 109.

Wenn also

$$\begin{array}{rcl} a : b & = & d : g \\ \text{und } a^2 : b^2 & = & d^2 : g^2 \end{array} \quad (\S.108.)$$

$$\begin{array}{rcl} \text{so folgt, daß } a \times a^2 : b \times b^2 & = & d \times d^2 : g \times g^2 \quad (\S.107) \\ \text{d. i. } a^3 : b^3 & = & d^3 : g^3 \end{array}$$

nämlich auch die Cubikzahlen befinden sich in einer geometrischen Proportion, wenn die Cubikwurzeln proportional sind.

§. 110.

Oft geschieht es, daß man diejenigen Grössen, deren Verhältniß man wissen will, nicht unmittelbar mit einander vergleichen kann. In diesem Falle pflegt man noch eine dritte, oder auch mehrere zu Hülfe zu nehmen, und eine Vergleichung derselben mit jeder von den beyden Grössen anzustellen. Z. E. sollte das Verhältniß der Grössen A und B untersucht werden, die sich nicht unmittelbar mit einander vergleichen ließen; so vergleiche man beyde mit einer drit-

dritten Größe C, mit welcher eine Vergleichung möglich ist. Verhält sich nun z. E.

$$\begin{array}{lrcrcr} & A & : & C & = & 1 : 4 \\ \text{und} & C & : & B & = & 2 : 3 \end{array}$$

$$A \times C : C \times B = 1 \times 2 : 4 \times 3 \quad (\S.\ 107.)$$

$$\frac{A \times C}{C} : \frac{C \times B}{C} = 1 \times 2 : 4 \times 3 \quad (\S.\ 104.)$$

$$\text{d. i.} \quad A : B = 1 \times 2 : 4 \times 3 \quad (\S.\ 19.)$$

$$\text{oder} \quad A : B = 2 : 12$$

Unter den angenommenen Bedingungen müssen sich also die beyden Grössen A und B wie die Zahlen 2 und 12 verhalten, welche nichts anders sind, als Producte aus den gleichnamigen Gliedern der beyden Verhältnisse 1 : 4 und 2 : 3. Man pflegt solche Verhältnisse, wie A : B, **zusammengesetzte Verhältnisse**, (rationes compositas) und diejenigen, wie 1 : 4 und 2 : 3, vermittelst welcher man erkennt, wie sich die zu vergleichenden Grössen verhalten, rationes componentes zu nennen. Von einigen werden sie auch folgendergestalt geschrieben:

$$A : B = \overline{1 : 4} + \overline{2 : 3}$$

wo aber das Zeichen + keine Addition, sondern nur eine Zusammensetzung der Verhältnisse, d. h. eine Multiplication anzeigt, wie man aus dem vorhergehender sehen kann. Sind die beyden rationes componentes völlig einerley, z. E. wenn

$$A : B = \overline{1 : 4} + \overline{1 : 4} \text{ oder}$$
$$A : B = 1 \times 1 : 4 \times 4 = 1^2 : 4^2$$

so

so wird ein solch zusammengesetztes Verhältniß ratio duplicata genannt, welches also darinnen besteht, daß sich zwey Dinge wie die Quadrate zweyer Zahlen oder Grössen verhalten.

Ein zusammengesetztes Verhältnis kann auch mehr als zwey rationes componentes haben, weil man bisweilen zwey, drey und mehr mittlere Grössen annehmen muß, um das Verhältnis zweyer Grössen zu entdecken. Hat ein solch zusammengesetztes Verhältnis drey gleiche rationes componentes, z. E. wenn

$$A : B = 1 : 4 + 1 : 4 + 1 : 4$$
$$\text{d. i. } A : B = 1 \times 1 \times 1 : 4 \times 4 \times 4$$
$$\text{oder } 1^3 : 4^3$$

so heißt es ratio triplicata und besteht also darinnen, daß sich zwey Dinge wie die Cubikzahlen zweyer Grössen verhalten.

§. 111.

Weiß man das erste und letzte Glied in einer stetigen geometrischen Proportion, so läßt sich das mittlere finden, wenn man aus dem Producte dieser beyden Glieder die Quadratwurzel ziehet.

Denn es sey das erste Glied einer stetigen Proportion 3 und das letzte 27, so muß das Product 3×27 d. i. 81 der Quadratzahl des mittlern Gliedes, (§. 97.) und folglich die Quadratwurzel aus diesem Producte, nämlich 9, dem mittlern Gliede selbst gleich seyn. Es verhält sich auch in der That

$$3 : 9 = 9 : 27.$$

§. 112.

§. 112.

Werden in einer geometrischen Proportion die ersten drey Glieder gegeben, so findet man das vierte, wenn man das Product aus dem zweyten und dritten Gliede durch das erste Glied dividirt.

Denn nennt man die drey ersten Glieder a, b, c und das letzte x, so ist

$$\frac{a \times x = b \times c}{} \quad (\S.\ 97.)$$

$$\frac{a \times x}{a} = \frac{b \times c}{a} \quad (\S.\ 18.)$$

$$\text{d. i.} \quad x = \frac{b \times c}{a} \quad (\S.\ 19.)$$

Man kann auch bisweilen die vierte geometrische Proportionalzahl noch geschwinder finden, nämlich in denjenigen Fällen, wo sich der Exponent leicht bestimmen läßt. Denn ist das zweyte Glied grösser als das erste, so darf man nur den Exponenten in das dritte multipliciren; ist das zweyte Glied aber kleiner als das erste, so muß das dritte Glied durch den Exponenten dividirt werden. Soll z. E. zu den drey Zahlen 16, 64, 315, die vierte Proportionalzahl gesucht werden, so dürfte man nur den Exponenten 4, den man durch die Division der Zahl 64 durch 16 erhält, in 315 multipliciren. Wären hingegen die Zahlen 48, 6, 240, gegeben, so müßte man die dritte Zahl 240 durch den Exponenten 8 dividiren.

Auf diesem Satze beruht die ganze Regel Detri, welche eben daher ihren Namen erhalten hat, weil sie zu drey gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das letzte finden lehrt. Denn dieser Name ist eigentlich durch eine Verstümmlung aus den lateinischen Worten, Regula de tribus, (nämlich numeris) entstanden. Es versteht sich also von selbst, daß man sie nur in denjenigen Fällen anwenden kann, wo sich die Dinge wirklich in einem geometrischen Verhältnisse befinden.

§. 113.

Es sey die Einheit das erste, b das zweyte, und c das dritte Glied, so muß das vierte Glied $\frac{b \times c}{1}$ d. i. $b \times c$ seyn. Es verhält sich daher

$$1 : b = c : b \times c$$

d. h. die Einheit, der Multiplicandus, der Multiplicator und das Product machen allemal eine geometrische Proportion. Hieraus läßt sich folgende, in vielen Fällen sehr brauchbare Erklärung der Multiplication herleiten. Nämlich eine Grösse durch eine andre multiplicieren heißt zu der Einheit und den beyden gegebenen Grössen die vierte geometrische Proportionalzahl suchen.

Wäre nun das zweyte und dritte Glied einerley, z. E. b, so müßte das letzte Glied $\frac{b \times b}{1}$ d. i. b^2 seyn, und also

$$1 : b = b : b^2$$

d. h.

d. h. die Einheit, die Quadratwurzel und die Quadratzahl geben eine geometrische Proportion; und die Quadratwurzel ist also die mittlere Proportionalzahl zwischen der Einheit und dem Quadrate.

§. 114.

Es sey a das erste, b das zweyte, und 1 das dritte Glied; so wird das vierte seyn $\frac{b \times 1}{a}$ d. i. $\frac{b}{a}$ (§. 112.) folglich

$$a : b = 1 : \frac{b}{a}$$

d. h. der Quotient ist die vierte geometrische Proportionalzahl zu dem Divisor, Dividendo und der Einheit; und wenn man daher zu zwey gegebenen Grössen und der Einheit die vierte Proportionalzahl sucht, so hat man dividirt.

§. 115.

Weil sich die Waaren und ihre Preise in einem geometrischen Verhältnisse befinden, wenn von einerley Waare und von einerley Zeit und Ort die Rede ist; so kann man durch Hülfe der Regel Detri aus dem gegebenen Preise einer gewissen Quantität Waare, den Preiß einer größern oder kleinern Quantität von eben derselben Waare finden. Z. E. man verlangt zu wissen, wie viel man für 72 Ellen Leinwand zu bezahlen habe, wenn 3 Ellen 2 Thaler kosten? Hier würde man folgendergestalt schliessen kön-

nen: Wie sich 3 Ellen zu 72 Ellen verhalten, so muß sich auch der Preiß von 3 Ellen, d. i. 2 Thlr. zu dem noch unbekannten Preiße von 72 Ellen verhalten; welcher also die vierte Proportionalzahl zu den drey bekannten Zahlen ist, und also gefunden werden kann.

3 Ellen : 72 Ellen = 2 Thlr. : x

$$\frac{2}{3)\ \overset{2}{\cancel{x}}\,\cancel{4}\,\cancel{4}\ (\ 48\ \text{Thlr.} = x}$$

Insgemein schreibt man in der Ausübung dergleichen Exempel also:

3 Ellen — 2 Thlr. — 72 Ellen.

welche Proportion, aus der vorigen, die natürlicher ist, entstehen muß, wenn man die Glieder alternando nach §. 100. versetzt.

§. 116.

Man findet in den gewöhnlichen Rechenbüchern eine Menge Regeln, sonderlich in Ansehung der Vortheile, die sich bey der Regel Detri anbringen lassen. Man kann aber die meisten dieser Regeln entbehren, wenn man sich die Rechnungsarten sowohl mit ganzen, als auch mit gebrochenen Zahlen, und die nothwendigsten Lehrsätze von den Verhältnissen und Proportionen hinlänglich bekannt gemacht hat. So wird man z. E. aus §. 104. leicht einsehen, daß sich die größern Zahlen eines Exempels der Regel Detri in kleinere verwandeln lassen, die eben das Verhältniß haben, wenn man das erste und zweyte,

oder

oder das erste und dritte Glied durch einerley Zahl ohne einen Ueberrest zu behalten, dividiren kann. Ich will mich also nur bey solchen Fällen noch aufhalten, bey denen ein Anfänger nicht gleich die Anwendung der bisher erklärten Sätze einsehen möchte. Daß sich die Regel Detri nur alsdenn anwenden läßt, wenn sich die Größen, von welchen die Rede ist, wirklich in einem geometrischen Verhältnisse befinden, ist schon oben (§. 112.) erinnert worden. Allein man muß, ehe man zu rechnen anfängt, auch untersuchen, in was für einer Ordnung solche Größen ein Verhältniß haben, damit man nicht die Proportion falsch schreibt; denn manche Dinge nehmen in eben dem Verhältniß zu, in welchem andre Dinge, die zu ihnen gehören, abnehmen, und von diesen pflegt man alsdenn zu sagen, daß sie sich in einem umgewendeten Verhältniß befinden; woraus einige eine besondere Gattung der Regel Detri, nämlich die sogenannte **verkehrte Regel Detri** gemacht haben. Z. E. die Zahl der Arbeiter, die einen gewissen Bau in einem Jahre vollenden würden, verhält sich nicht zu einer andern Anzahl von Arbeitern, die eben diesen Bau in einem halben Jahre endigen könnten, wie die erste Zeit zu der andern Zeit, sondern umgewendet, wie die andre Zeit zu der ersten Zeit. Denn nimmt man noch einmal so viel Arbeitsleute, so braucht man nur halb so viel Zeit, nimmt man aber nur halb so viel Leute, so braucht man noch einmal so viel Zeit. Sollte man daher folgendes Exempel ausrechnen: 800 Soldaten können einen gewissen Festungsbau in 15 Monaten vollenden; wie viel wird man Soldaten nöthig haben, um diesen Bau in 4 Monaten zu Stan-

de zu bringen? so würde man folgendergestalt schliessen müssen. Wie sich 4 Monat zu 15 Monaten verhalten, so verhält sich umgewendet die Anzahl der Soldaten, die man in 15 Monaten braucht, zu der Anzahl der Soldaten, die in 4 Monaten eben diese Arbeit verrichten können.

4 Mon. : 15 Mon. = 800 Sold. : y

800

12000

4) 3000 Soldaten. = y

Nämlich man hat 3000 Soldaten nöthig, um eben diesen Bau in 4 Monaten zu endigen.

§. 117.

Die Regula de quinque, welche in vielen Rechenbüchern ein besonder Capitel ausmacht, erfordert ebenfalls keine besondern Regeln, wenn man sich die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen bekannt gemacht hat; denn sie unterscheidet sich von der einfachen Regel Detri nur dadurch, daß in den dahin einschlagenden Exempeln zusammengesetzte Verhältnisse vorkommen. Man kann daher dergleichen Exempel entweder auf einmal rechnen, wenn man das verstanden hat, was (§. 110.) von den zusammengesetzten Verhältnissen gelehrt worden ist, oder zwey Exempel der einfachen Regel Detri daraus machen. Z. E. wie viel betragen die Interessen von 1800 Thlr. in 15 Jahren, wenn man für 100 Thlr. in einem Jahr 6 Thlr. Interessen bewilliget hat?

Hat? Wenn man erwägt, daß die Interessen sich sowohl nach der Grösse der Capitalien, als auch nach der Länge der Zeit richten, oder mathematisch zu reden, sich in einem zusammengesetzten Verhältnisse der Capitalien und Zeit befinden; so wird man leicht einsehen, daß die Proportion nach §. 110. also geschrieben werden müßte, wenn man die unbekannten Interessen von 1800 Thlr. in 15 Jahren unterdessen y nennt.

6 Thlr. : y = 100 Thlr. : 1800 Thlr. + 1 Jahr : 15 Jahr.
d. i. 6 Thlr. : y = 100 × 1 : 1800 × 15
oder 100 × 1 : 1800 × 15 = 6 Thlr. : y

Welche Proportion man aber in der Ausübung so zu schreiben pflegt, daß man die Zahlen, welche in einander multiplicirt werden sollen, untereinander setzt. Z. E.

100 Thlr. : 1800 Thlr.
1 Jahr : 15 Jahr = 6 Thlr. : y

1ØØ
90
18
270ØØ
6
1620 Thlr. = y

Eben dieses würde man auch erhalten, wenn man erst untersuchte, wie viel die Interessen von 1800 Thlr. in einem Jahre betrügen, und die gefundne Zahl hernach durch 15 multiplicirte. Denn nimmt man einerley Zeit an, so müssen sich die Interessen bloß wie die Capitalien verhalten. Folglich

100 Thlr. : 1800 Thlr. = 6 Thlr. : x

6

108 Thlr. = x

Geben nun 1800 Thlr. in einem Jahr 108 Thlr. Interessen, so müssen sie in 15 Jahren, 15mal so viel geben, oder

1 Jahr : 15 Jahr = 108 Thlr. : y

15

540

108

1620 Thlr. = y

§. 118.

In der Gesellschafts-Rechnung hat man weiter nichts zu merken, als daß man die Regel Detri so vielmal anwenden muß, als Mitglieder in derjenigen Gesellschaft sind, unter welche ein gewisser Gewinnst nach dem Verhältnisse ihrer Einlage getheilt werden soll. Z. E. eine Gesellschaft von drey Kaufleuten, wovon der erste 8000 Thlr. der andre 7000 Thlr. und der dritte 5000 Thlr. zu einer gemeinschaftlichen Handlung vorgeschossen hat, gewinnt in einer gewissen Zeit 60000 Thlr. Es fragt sich daher, wie viel ein jeder von dem Gewinste erhalten müsse? Da es unbillig wäre, wenn derjenige, der ein kleines Capital zur Handlung hergegeben hat, eben so viel von dem Gewinnste erhielte, als ein andrer, dessen Capital viel grösser gewesen ist: so wird man leicht einsehen, daß der Gewinnst nach dem Verhältniß der vorgeschossenen Capitalien ausgetheilt werden

den muß. Es läßt sich also der Gewinnst eines jeden bestimmen, wenn man alle drey Capitalien zusammen addirt, und folgendergestalt schließt: wie sich die ganze Summe, womit gehandelt worden ist, zu dem ganzen Gewinnste verhält, so verhält sich auch das Capital eines jeden Mitglieds zu seinem Antheile von dem Gewinnste.

Das Capital des ersten	8000 Thlr.
Das Capital des andern	7000 Thlr.
Das Capital des dritten	5000 Thlr.
Summe	20000 Thlr.

$$\frac{2000\text{ Thlr.}}{2)\ 1} : \frac{6000\text{ Thlr.}}{3} = 8000\text{ Thlr.} : x$$

$$\frac{3}{24000} = x$$

$$\frac{2000\text{ Thlr.}}{2)\ 1} : \frac{6000\text{ Thlr.}}{3} = 7000\text{ Thlr.} : y$$

$$\frac{3}{21000} = y$$

$$\frac{2000\text{ Thlr.}}{2)\ 1} : \frac{6000\text{ Thlr.}}{3} = 5000\text{ Thlr.} : z$$

$$\frac{3}{15000} = z$$

Probe:

x =	24000 Thlr. Gew. des 1sten
y =	21000 Thlr. Gew des 2ten
z =	15000 Thlr. Gew. des 3ten
	60000 Thlr. Summe des ganzen Gewinnsts.

§. 119.

Auf die vorige Art werden auch verschiedne andre Exempel gerechnet, wo Dinge nach einem gewissen Verhältnisse vermischt werden müssen, wenn sie eine verlangte Wirkung thun sollen. Z. E. wenn man 100 Pf. Salpeter, 18 Pf. Schwefel und 20 Pf. Kohlen, nachdem diese Materien fein zerrieben worden, unter einander mengt; so erhält man Schießpulver. Es fragt sich, wie viel man von jeder Sache nehmen müsse, wenn man nur 23 Pfund Pulver verlangte? Diese Rechnung, deren Erklärung überflüßig seyn würde, weil sie einerley Grund mit der vorigen hat, läßt sich folgendergestalt anstellen, wobey dieses zu merken ist, daß x den Salpeter, y den Schwefel und z die Kohlen bedeutet, nach deren Menge hier gefragt wird.

100 Pf. Salpeter.
18 Pf. Schwefel.
20 Pf. Kohlen.

138 Pf.

138 Pf. : 23 Pf. = 100 Pf. : x

23) 6 1 6) $16\frac{2}{3}$ Pf. = x

138 Pf. : 23 Pf. = 18 Pf. : y

6 1 6) 3 Pf. = y.

138 Pf. : 23 Pf. = 20 Pf. : z

6 1 6) $3\frac{1}{3}$ Pf. = z

Pro-

Probe:

$16\frac{2}{3}$ Pf. Salpeter
3 Pf. Schwefel
$3\frac{1}{3}$ Pf. Kohlen

Summe 23 Pfund.

Siebentes Capitel.

Von den Progreßionen und Logarithmen.

§. 120.

Man nennt eine Reihe Zahlen, die nach einerley Gesetz wachsen oder abnehmen, eine **Progreßion**. Bestehet dieses Gesetz darinnen, daß immer zwey Zahlen, die unmittelbar auf einander folgen, einerley Unterschied haben; so nennt man eine solche Reihe eine **arithmetische Progreßion**, weil sie lauter arithmetische Verhältnisse enthält, und als eine Fortsetzung einer stetigen arithmetischen Proportion angesehen werden kann. Z. E. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. Ist aber das allgemeine Gesetz, nach welchem die Zahlen zunehmen oder abnehmen, dieses, daß überall einerley Quotient entsteht, wenn ein Paar auf einander folgende Glieder durch einander dividirt werden, so heißt die Progreßion **geometrisch**; weil sie aus lauter geometrischen Verhältnissen besteht, und als eine fortgesetzte stetige geometrische Proportion angesehen werden kann. Z. E.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. Der Quotient, welchen man erhält, wenn man ein Glied durch das folgende oder vorhergehende dividirt, wie in dem itzt angeführten Beyspiele die Zahl 3, wird daher auch der **Exponent der Progreßion** genannt. Eine jede Progreßion heißt **steigend**, (progreſſio adſcendens) wenn die folgenden Glieder gröſſer ſind, als die vorhergehenden, und **fallend**, (progreſſio deſcendens) wenn ſie kleiner ſind. Die vorigen Beyſpiele alſo, 1. 3. 5. 7. 9. u. ſ. f. 1. 3. 9. 27. 81. u. ſ. f. gehören unter die ſteigenden, hingegen folgende beyde: 30. 27. 24. 21. 18. 15. 12. 9. 6. 3. 0. und 32. 16. 8. 4. 2. 1. unter die fallenden Progreßionen. Eine ſteigende arithmetiſche Progreßion wird daher gemacht, wenn man den Unterſchied zu dem vorhergehenden Gliede addirt; und eine ſteigende geometriſche, wenn man den Exponenten in das vorhergehende multiplicirt. Eine fallende arithmetiſche Progreßion hingegen entſteht, wenn man den Unterſchied von dem vorhergehenden Gliede ſubtrahirt; und eine fallende geometriſche Progreßion, wenn man das vorhergehende Glied durch den Exponenten dividirt.

§. 121.

Wenn man die Erklärung einer arithmetiſchen Progreßion überlegt, ſo wird man von ſelbſt einſehen, daß nicht nur diejenigen Glieder einer ſolchen Progreßion, die unmittelbar auf einander folgen, ſondern auch diejenigen, die gleich weit von einander abſtehen, einerley arithmetiſches Verhältniß haben müſſen. Man vergleiche z. E. in der folgenden Progreßion,

1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25.

das erste Glied 1 mit dem vierten Gliede 10; ferner das zweyte Glied 4 mit dem fünften Gliede 13, welche beyde eben so weit von einander abstehen, als die vorigen 1 und 10, so wird man finden, daß

$$1 \,.\, 10 = 4 \,.\, 13$$

Denn weil 13 von 4 eben so weit absteht, als 10 von 1, so muß auch 13 aus 4 auf eben die Art entstehen, wie 10 aus 1. Nun entsteht aber hier das Glied 10 aus dem Gliede 1, weil jenes um 3 Stellen von diesem absteht, indem man die Differenz 3 zu dem Gliede 1 dreymal addirt; folglich muß auch das Glied 13 aus dem Gliede 4 durch dreymalige Addition der Differenz 3 entstehen, und daher zwischen diesen beyden eben der Unterschied seyn, als zwischen den vorigen Gliedern 1 und 10 ist.

§. 122.

Eben so leicht läßt sich aus dem Begriffe einer geometrischen Progreßion einsehen, daß nicht nur die Glieder, die unmittelbar auf einander folgen, sondern auch diejenigen, die gleich weit von einander abstehen, einerley geometrisches Verhältniß haben müssen; weil diejenigen Glieder, die gleich weit von einander abstehen, auf einerley Art durch die Multiplication oder Division aus einander gemacht werden. Z. E. in der geometrischen Progreßion

1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128 .

verhält sich nicht nur

1 : 2 = 4 : 8

sondern auch

1 : 8 = 2 : 16

oder

2 : 32 = 4 : 64

oder

4 : 32 = 16 : 128

§. 123.

Verbindet man eine geometrische Progreßion, deren erstes Glied 1 ist, und eine arithmetische, die sich mit 0 anfängt, und zum Unterschiede der Glieder 1 hat, dergestalt mit einander, daß man zu jedem Gliede der geometrischen ein Glied der arithmetischen Progreßion setzt, so werden die Glieder der arithmetischen Progreßion **Logarithmen**, von den correspondirenden Gliedern der geometrischen Progreßion genannt. Z. E.

Geom. Pr. 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128.
Arithm. Pr. 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7.

Hier ist also 3 der Logarithmus von 8, und 4 der Logarithmus von 16, u. s. f. Die Ursache dieser Benennung ist folgende. Weil sich die arithmetische Progreßion die man zu dieser Absicht erwählet, mit Null anfängt, und der Unterschied der Glieder 1 ist, so zeigen die Glieder der arithmetischen Progreßion die Anzahl der Verhältnisse in der geometrischen Progreßion an. Der Logarithmus von 2 ist daher 1, weil die Glieder 1 und 2 der geometrischen Progreßion das erste Verhältniß ausmachen. Der Loga-

rith-

rithmus von 4 ist 2, weil es von 1 bis zur 4 zwey Verhältnisse in dieser Reihe giebt, u. s. f. Man hat daher die Glieder der arithmetischen Progreßion Zahlen der Verhältnisse genannt; denn dieses will das griechische Wort Logarithmus eigentlich sagen, welches aus den Wörtern λογος, ein Verhältniß, und ἀριθμος, eine Zahl, zusammengesetzt ist. Weil man nun in einer geometrischen Progression, die sich mit 1 anfängt, jedes Glied als eine Dignität des Exponenten der Progreßion betrachten, und das vorhin angeführte Beyspiel auch folgendergestalt ausdrücken kann:

Geom. Pr. 1. 2^1. 2^2. 2^3. 2^4. 2^5. 2^6.
Arithm. Pr. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

in welchem Falle die Exponenten der Dignität von dem Exponenten der Progreßion mit den Logarithmen völlig überein kommen; so ist offenbar, daß ein Logarithmus nichts anders ist, als der Exponent derjenigen Dignität, zu welcher eine willkührlich angenommene Zahl erhoben werden muß, um einer gegebenen Zahl gleich zu werden. Der Logarithmus z. E. von 128 ist also in dem vorhin gewählten System der Exponent derjenigen Dignität, zu welcher man die Zahl 2 erheben muß, um die Zahl 128 zu erhalten, oder allgemein betrachtet, von a^n ist der Logarithmus n, von a^m aber ist der Logarithmus m. Das Zeichen, wodurch man die Logarithmen anzeigt, ist entweder der Buchstabe l. oder die Abbreviatur log. Der Ausdruck l. 32 oder log. 32 = 5 heißt also nichts anders, als daß 5 der Logarithmus der Zahl 32 ist. Die Erfindung der Logarithmen, wodurch die ganze Mathematik sehr wichtige Vortheile erhal-

ten hat, wird gemeiniglich dem **Baron Nepper**, einem Schottländer, zugeschrieben, welcher davon eine besondere Schrift unter dem Titel: Mirifici Canonis Logarithmorum descriptio, heraus gegeben hat. Doch wollen einige angesehene Schriftsteller behaupten, daß **Justus Byrge**, ein Deutscher, für den ersten Erfinder derselben zu halten sey.

§. 124.

Erwählt man eine andre geometrische Progression, so müssen die Glieder der arithmetischen Progreßion nothwendig Logarithmen von andern Zahlen werden. Z. E.

Geom. Pr. 1 . 3 . 9 . 27 . 81 . 243 .
Arithm. Progr. 0 . 1. 2. 3. 4. 5 .

Hier ist also die Zahl 4, welche vorhin der Logarithmus von 16 war, der Logarithmus von 81. u. s. f. Da man sich nun eine unendliche Anzahl von geometrischen Progreßionen vorstellen kann, so ist klar, daß jede Zahl der Logarithmus von einer unendlichen Menge Zahlen seyn könne. Wird aber eine gewisse geometrische Progreßion bestimmt, so kann ein Logarithmus nur einer einzigen Zahl zugehören. Ich will jetzt unterdessen, damit die folgenden Sätze durch Beyspiele erläutert werden können, wieder diejenige geometrische Progreßion erwählen, deren Exponent 2 ist, und neben jede Zahl ihren Logarithmum setzen.

Zahlen.	Logarithmen.
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17
262144	18
524288	19
1048576	20
2097152	21 u. s. f.

§. 125.

Wenn die Glieder in der geometrischen Progreßion unmittelbar auf einander folgen, oder gleich weit von einander abstehen, so müssen auch die dazu gehörigen Logarithmen entweder unmittelbar auf einander folgen, oder einerley Abstand von einander haben. Da nun sowohl in einer arithmetischen, als auch in einer geometrischen Progreßion die unmittelbar auf einander folgenden oder gleich weit von einander abstehenden Glieder eine Proportion ausmachen (§. 121. 122.); so ist klar, daß die Logarithmen solcher Grössen oder Zahlen, die

geo

geometrisch proportional sind, sich in einer arithmetischen Proportion befinden müssen. Wenn daher

b : g = a : m

so folgt, daß log. b . log. g = log. a . log. m

Oder wenn

4 : 32 = 2 : 16

log. 4 . log. 32 = log. 2 . log. 16.
d. i. 2 . 5 = 1 . 4 (§. 124.)

Und weil man aus drey gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion das 4te findet, wenn man das zweyte zu dem dritten addirt, und von dieser Summe das erste abzieht (§. 93.); so muß man den Logarithmum der vierten geometrischen Proportionalgrösse erhalten, wenn man die Logarithmen des zweyten und dritten Gliedes zusammen addirt, und hiervon den Logarithmum des ersten Gliedes abzieht. Man kann daher durch Hülfe der Logarithmen die Exempel der Regel Detri ohne multipliciren und dividiren berechnen, wenn man eine Tabelle besitzt, worinnen die Logarithmen derjenigen Zahlen befindlich sind, die als Glieder der Proportion vorkommen. Wir wollen z. E. zu 2, 256 und 16 durch Hülfe der Logarithmen die vierte geometrische Proportionalzahl suchen, oder welches eben dieselbe Rechnung in benannten Zahlen ist, wir wollen den Preiß von 256 Ellen bestimmen, der unterdessen x heissen soll, wenn 2 Ellen 16 Thlr. kosten. Weil nun hieraus folgende Proportion entsteht:

2 Ellen

2 Ellen : 256 Ellen = 16 Thlr. : x

so ist log. x = log. 256 + log. 16 — log. 2.
Nun ist log. 256 = 8) (§. 124.)
log. 16 = 4)

log. 256 + log. 16 = 12
log. 2 = 1 (§. 124.)

log. x = log. 256 + log. 16 — log. 2 = 12 — 1 = 11

Aus dieser Rechnung ersieht man, daß der Logarithmus von der verlangten Zahl x die Zahl 11 ist. Sucht man nun diesen Logarithmum in der Tabelle §. 124. auf, so findet man, daß er der Logarithmus von 2048 ist, welches also die vierte Proportionalzahl, die verlangt wird, seyn muß. Nämlich 256 Ellen würden unter der vorigen Bedingung 2048 Thaler kosten. Wer die Richtigkeit dieses Verfahrens durch die Erfahrung untersuchen will, darf nur das vorige Exempel auf die gewöhnliche Art, ohne Logarithmen, berechnen.

2 Ellen : 256 Ellen = 16 Thlr. : x

2) 1 128
16
768
128
2048 Thlr.

§. 126.

Aus dem vorigen Hauptsatze läßt sich auch dieser Satz leicht einsehen, daß der Logarithmus

eines Products entsteht, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. Heissen also die Factores b und c, so ist

$$\log. b \times c = \log. b + \log. c.$$

Denn

$$1 : b = c : b \times c \quad (\S. 113.)$$

$$\log. b \times c = \log. b + \log. c - \log. 1. \quad (\S. 125.)$$
$$\log. 1 = 0 \quad (\S. 123.)$$

$$\log. b \times c = \log. b + \log. c$$

Solltnn also die Zahlen 8192 und 128 in einander multiplicirt werden, so könnte man dieses Product durch Hülfe der Logarithmen finden, wenn man die Logarithmen dieser beyden Zahlen zusammen addirte, und diese Summe in der logarithmischen Tabelle aufsuchte. Die dazu gehörige Zahl müßte das verlangte Product seyn.

$$\log. 8192 = 13$$
$$\log. 128 = 7 \quad (\S. 124.)$$

$$\log. 8192 \times 128 = 13 + 7 = 20$$
$$20 = \log. 1048576 \quad (\S. 124.)$$

$$8192 \times 128 = 1048576 \quad (\S. 11.)$$

Daß auch wirklich 1048576 das wahre Product der beyden Zahlen 8192 und 128 sey, können Anfänger durch die gewöhnliche Multiplication untersuchen.

$$\begin{array}{r} 8192 \\ 128 \\ \hline 65536 \\ 16384 \\ 8192 \\ \hline 1048576 \end{array}$$

§. 127.

Weil eine Quadratzahl nichts anders ist, als ein Product, das aus zwey gleichen Factoren besteht (§. 68.), so muß der Logarithmus einer Quadratzahl noch einmal so groß seyn, als der Logarithmus der Wurzel; und der Logarithmus der Wurzel halb so groß, als der Logarithmus der Quadratzahl. Denn ist z. E. a die Wurzel und a × a das Quadrat, so ist

log. a × a = log. a + log. a (§. 126.)
d. i. log. a^2 = 2 log. a

$$\frac{\log. a^2}{2} = \frac{2 \log. a}{2} \quad (§. 18.)$$

d. i. $\frac{1}{2}$ log. a^2 = log. a (§. 19.)

Soll man also 1024 zum Quadrat erheben, so suche man den Logarithmum von dieser Zahl, welcher nach dem oben (§. 124.) angenommenen System 10 ist. Das zweyfache davon, nämlich 20, als den Logarithmum des Quadrats, suche man unter den Logarithmen, so muß die dazu gehörige Zahl, nämlich 1048576 (§. 124.), die verlangte Quadratzahl seyn. Verlangt man aber die Quadratwurzel aus 1024, so halbire man den Logarithmum 10, und suche den halben Logarithmum 5 in der Tabelle, so wird die Zahl 32, wovon 5 der Logarithmus ist, die Quadratwurzel aus 1024 seyn.

§. 128.

Weil eine Cubikzahl entsteht, wenn man eine Quadratzahl in die Wurzel multiplicirt, so muß

der Logarithmus einer Cubikzahl dreymal so groß, als der Logarithmus der Cubikwurzel, und der Logarithmus einer Cubikwurzel der dritte Theil von dem Logarithmo der Cubikzahl seyn. Denn es sey a die Cubikwurzel, so ist

$$a^2 \times a = a^3 \qquad (\S.\ 80.)$$

$$\log. a^2 \times a = \log. a^2 + \log. a \qquad (\S.\ 126.)$$
$$\log. a^2 = 2 \log. a \qquad (\S.\ 127.)$$

$$\log. a^2 \times a = 2 \log. a + \log. a \qquad (\S.\ 9.)$$

d. i. $\log. a^3 = 3 \log. a$

$$\frac{\log. a^3}{3} = \frac{3 \log. a}{3} \qquad (\S.\ 18.)$$

d. i. $\frac{1}{3} \log. a^3 = \log. a$ (§. 19.)

Soll also z. E. aus 2097152 die Cubikwurzel gesucht werden; so nehme man den dritten Theil von dem Logarithmo dieser Zahl, d. i. von 21, (§. 124.) und suche dieses Drittel, d. i. 7, unter den Logarithmen, so muß die dazu gehörige Zahl 128 die Cubikwurzel von 2097152 seyn. Umgewendet würde man 128 zur Cubikzahl erheben, wenn man den Logarithmum 7 dreymal nähme, und diese dreyfache Sieben, d. i. 21 unter den Logarithmen aufsuchte.

§. 129.

Der Logarithmus eines Quotienten wird gefunden, wenn man den Logarithmum des Divisors von dem Logarithmo des Dividendi subtrahirt. Es sey z. E. b der Dividendus, und a der Divisor, so ist

log.

$$\log. \frac{b}{a} = \log. b - \log. a$$

Denn

$$a : b = 1 : \frac{b}{a} \qquad (\S.\ 114.)$$

$$\log. \frac{b}{a} = \log. b + \log. 1 - \log. a \qquad (\S.\ 125.)$$

$$\log. 1 = 0 \qquad (\S.\ 123.)$$

$$\log. \frac{b}{a} = \log. b - \log. a$$

Sollte also die Zahl 524288 durch 2048 dividirt werden, so könnte man den Quotienten ohne Division entdecken, wenn man nur seinen Logarithmum suchte. Diesen aber würde man finden, wenn man den Logarithmum der Zahl 2048 von dem Logarithmo der Zahl 524288, d. i. 11 von 19 subtrahirte (§. 124.). Ist nun 19 — 11, d. i. 8 der Logarithmus des Quotienten, so muß die dazu gehörige Zahl 256 der Quotient selbst seyn; wovon sich auch Anfänger durch die gewöhnliche Division überzeugen können.

```
2048) 524288 (256
      4096
      -----
      11468
      10240
      -----
       12288
       12288
       -----
           0
```

§. 130.

Weil man die Brüche als Quotienten ansehen kann, und alsdenn der Zähler eines Bruchs der Dividendus, und der Nenner desselben der Divisor wird (§. 46.), so folgt hieraus, daß **der Logarithmus eines Bruchs entstehet, wenn man den Logarithmum des Nenners von dem Logarithmo des Zählers subtrahirt.** Ist nun der Bruch ein wahrer Bruch, so muß der Nenner größer als der Zähler (§. 47.), und folglich auch der Logarithmus des Nenners größer, als der Logarithmus des Zählers seyn. Da nun durch die Subtraction einer größern Zahl von einer kleinern nothwendig eine negative Differenz entsteht (§. 30.); so ist klar, daß die Logarithmen aller wahren Brüche negativ oder verneinend seyn müssen. Z. E.

$$\log. \tfrac{2}{4} = \log. 2 - \log. 4$$
$$\log. 2 - \log. 4 = 1 - 2 \quad (\S. 124.)$$

$$\log. \tfrac{2}{4} = 1 - 2 = -1 \quad (\S. 30.)$$

§. 131.

Aus den bisher angeführten Sätzen wird man also leicht die Vortheile erkennen, welche die Logarithmen im Rechnen verschaffen, indem sie das beschwerliche Multipliciren und Dividiren in Addiren und Subtrahiren verwandeln, auch die Quadrat- und Cubikwurzel auf eine leichte Art finden lehren. Dieser Vortheile aber kann man sich nur alsdenn bedienen, wenn man eine Tabelle bey der Hand hat, welche die Logarithmen aller derjenigen Zahlen enthält,

hält, die in den gewöhnlichen Rechnungen vorzukommen pflegen. Diejenige Tabelle also, welche oben (§. 124.) in der Geschwindigkeit aufgesetzt worden ist, damit die Hauptsätze der Logarithmen durch Beyspiele erläutert werden konnten, würde zu dieser Absicht nicht hinlänglich seyn, indem darinnen die Logarithmen der meisten Zahlen fehlen. Man hat daher durch sehr mühsame Rechnungen, die sich hier nicht ohne Weitläuftigkeit anführen, noch viel weniger hinlänglich erklären lassen, diesem Mangel einigermaßen abzuhelfen gesucht, wie man aus den gedruckten Tabellen ersehen kann, wovon es sehr vielerley Ausgaben giebt, welche nicht nur in Ansehung der Vollständigkeit, sondern auch in Ansehung der Richtigkeit, sehr von einander unterschieden sind. Für die besten hält man Shervins Mathematical Tables, welche W. Gardiner zu London 1742. in klein 4. herausgegeben hat, wo man die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 101000 antrift. Weil aber diese Auflage in den Buchläden nicht mehr zu haben ist, so hat ein gelehrter Jesuite zu Avignon einen, mit verschiednen nützlichen Zusätzen, versehenen Nachdruck 1770. in klein Fol. veranstaltet. Von den in Deutschland gedruckten logarithmischen Tafeln sind diejenigen die besten, welche Hr. J. C. Schulze zu Berlin 1778. herausgegeben hat. Unter den übrigen Ausgaben sind die Vlacquischen und Wolffischen die gewöhnlichsten und wohlfeilsten. Doch enthalten sie nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000. Man hat aber in diesen Tabellen, nicht die oben (§. 124.) angenommene geometrische Progreßion, sondern folgende: 1, 10, 100, 1000, u. s. f. gewählet. Wenn man nun hierzu die arith-

metische Progreßion setzt, die sich mit 0 anfängt, und zum Unterschiede der Glieder 1 hat,

1 . 10 . 100 . 1000 . 10000 . 100000 .
0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 .

so ist offenbar, daß 1 der Logarithmus von 10, ferren 2 der Logarithmus von 100, u. s. f. in diesem System seyn muß. Alle Zahlen also, die zwischen 1 und 10 fallen, haben zum Logarithmo einen wahren Bruch; weil ein solcher Logarithmus zwischen 0 und 1 fallen, folglich grösser als nichts, und kleiner als die Einheit seyn muß. Die Zahlen zwischen 10 und 100 haben zum Logarithmo die Einheit nebst einem Bruche; die Zahlen zwischen 100 und 1000 haben zum Logarithmo die Zahl 2 nebst einem Bruche u. s. f. In den gewöhnlichen Tafeln hat man diesen Bruch bis auf sieben Decimalstellen, und in einigen noch genauer ausgerechnet. Diejenige Zifer in einem Logarithmo, welche ganze Zahlen bedeutet, pflegt man die **Kennzifer** oder **Characteristik** zu nennen. So ist z. E. in dem Logarithmo von $54 = 1.7323938$ die Kennzifer 1, und die übrigen Zifern, die nach dem Puncte folgen, sind Decimalbrüche. In dem Logarithmo von $2677 = 3.4276184$ ist die Kennzifer 3, u. s. f.

§. 132.

Damit Anfänger die gedruckten Tabellen recht gebrauchen lernen, will ich mich noch ein wenig bey dieser Materie aufhalten, und gewisse, bey diesen Rechnungen nöthige Vortheile erklären, zumal da sehr oft Zahlen und Logarithmen vorkommen, die man in den gewöhnlichen Tabellen nicht antrift, und

die

die man doch durch eine leichte Rechnung entdecken kann, wenn man sich folgende Sätze hinlänglich bekannt macht. Erstlich läßt sich schon aus der Betrachtung der angenommenen geometrischen Progression, die zum Exponenten 10 hat, unmittelbar einsehen, daß der Logarithmus um eine ganze Einheit zunimmt, wenn die Zahl zehnmal grösser, daß der Logarithmus um 2 Einheiten zunimmt, wenn die Zahl hundertmal grösser gemacht wird, u. s. f. Denn der Logarithmus von 10 ist 1, der Logarithmus von 100 ist 2, u. s. w. Hieraus folgt also, daß man die Kennzifer eines Logarithmen um so viel Einheiten vermehren müsse, als man zu der correspondirenden Zahl rechter Hand Nullen gesetzt hat, ohne die Decimalbrüche im geringsten zu verändern. Z. E. vermöge der Tabellen ist

log. 67 = 1. 8260748

Man kann daher nunmehr ohne Tabellen die Logarithmen von 670, von 6700, von 67000 u. s. f. wissen. Nämlich

log. 670 = 2. 8260748
log. 6700 = 3. 8260748
log. 67000 = 4. 8260748

Wer noch einen Zweifel wider diesen Satz haben sollte, der kann sich von der Wahrheit desselben auf folgende Art überzeugen.

log. 67 = 1. 8260748
log. 10 = 1. 0000000 (§. 131.)

---

log. 67 × 10 = 2. 8260748 (§. 126.)
d. i. log. 670 = 2. 8260748

Ferner

log. 67 = 1. 8260748
log. 100 = 2. 0000000 (§. 131.)

---

log. 6700 = log 67 × 100 = 3. 8260748 u. s. w.

§. 133.

Wenn man daher die Kennzifer eines Logarithmen vermindert, und die Decimalbrüche unverändert läßt, so müssen in der dazu gehörigen Zahl, wofern sie Nullen enthält, rechter Hand so viel Nullen wegfallen, als man Einheiten in der Kennzifer des Logarithmen weggenommen hat. Enthält die Zahl aber keine Nullen, so müssen eben so viel Zifern, von der Rechten gegen die Linke zugerechnet, Decimalbrüche werden, und so auch umgewendet. Z. E.

3. 9590414 ist der Logarithmus von 9100

---

folglich ist 2. 9590414 der Logarithmus von 910
und 1. 9590414 der Logarithmus von 91

Ferner

3. 9173479 ist der Logarithmus von 8267

---

folglich ist 1. 9173479 der Logarithmus von 82,67
und 0. 9173479 der Logarithmus von 8,267

Die

Die Ursache davon ist folgende:

Erstlich:

3. 9590414 = log. 9100
1. 0000000 = log. 10 (§. 131.)

$$2.9590414 = \log. \frac{9100}{10} = \log. 910 \quad (§.\ 129.)$$

oder

3. 9590414 = log. 9100
2. 0000000 = log. 100 (§. 131.)

$$1.9590414 = \log. \frac{9100}{100} = \log. 91 \quad (§.\ 129.)$$

Ferner

3. 9173479 = log. 8267
2. 0000000 = log. 100

$$1.9173479 = \log. \frac{8267}{100} = \log. 82{,}67 \quad (§.\ 129.)$$

oder

3. 9173479 = log. 8267
3. 0000000 = log. 1000

$$0.9173479 = \log. \frac{8267}{1000} = \log. 8{,}267 \quad (§.\ 129.)$$

Man

Man kann also von den vermischten Zahlen, wenn sie Decimalbrüche enthalten, und nicht allzugroß sind, die Logarithmen aus den Tabellen sehr leicht finden, obgleich nur die Logarithmen der ganzen Zahlen angegeben sind, wenn man alle Zifern als ganze Zahlen betrachtet, von dieser Zahl den Logarithmum aufsucht, und hernach in der Kennzifer desselben so viel Einheiten wegstreicht, als man Decimalbrüche in der vermischten Zahl antrift. Z. E. es sey der Logarithmus von 5,67 zu suchen. Man nehme aus den Tabellen den Logarithmum von 567, nämlich 2.7535831. Da nun in der gegebenen Zahl zwey Zifern Decimalbrüche bedeuten, so nehme man zwey Einheiten aus der Kennzifer des Logarithmi hinweg; wodurch man zur Kennzifer Null, und zum Logarithmo von 5,67 folgenden

0. 7535831

erhalten muß.

§. 134.

Wenn man die Unterschiede der Logarithmen, und die Unterschiede der Zahlen, zu denen sie gehören, mit einander vergleicht; so findet man, daß die Unterschiede der Logarithmen sich beynahe eben so verhalten, wie die Unterschiede der Zahlen. Bey den kleinen Zahlen ist dieser Satz merklich falsch, bey den grössern aber, sonderlich bey denen, die über 8000 betragen, ist der Fehler oft so geringe, daß man ihn kaum entdecken kann; daher man sich desselben fleißig zu bedienen pflegt, wenn man Logarithmen von Zahlen wissen will, die sich nicht in den gewöhnlichen Tabellen befinden. Wir wollen zuerst

den

den Satz bey kleinern, und hernach auch bey grös-sern Zahlen prüfen.

log. 669 = 2. 8254261
log. 668 = 2. 8247765

Unterſch. der Zahlen. 1 Unterſch. der Log. 6496

log. 669 = 2. 8254261
log. 665 = 2. 8228216

Unterſch. der Zahlen. 4 Unterſch. der Log. 26045

Nun wollen wir verſuchen, ob ſich die Unterſchiede der Zahlen 1 und 4 eben ſo verhalten, wie die Unterſchiede ihrer Logarithmen, 6496 und 26045. In dem Verhältniſſe 1 : 4 iſt der Exponent 4; in dem Verhältniſſe 6496 : 26045 aber $4\frac{51}{6496}$, und alſo um $\frac{51}{6496}$ gröſſer, als der vorige. Folglich würden in dieſem Falle die Unterſchiede der Zahlen, und die Unterſchiede ihrer Logarithmen keine richtige Proportion geben. Laßt uns daher ſehen, ob der Fehler bey gröſſern Zahlen eben ſo beträchtlich ſeyn wird.

log. 8236 = 3. 91557163
log. 8235 = 3. 91556636

Unterſch. der Zahl. 1 Unterſch. der Log. 527

log. 8236 = 3. 91557163
log. 8234 = 3. 91556109

Unterſch. der Zahl. 2 Unterſch. der Log. 1054

Hier haben die Unterschiede der Zahlen 1 und 2 völlig eben das Verhältniß, wie die Unterschiede ihrer Logarithmen 527 und 1054. Denn

$$1 : 2 = 527 : 1054$$

weil in beyden Verhältnissen der Exponent 2 ist.

§. 135.

Durch Hülfe des vorigen Satzes lassen sich die Logarithmen vieler Zahlen, die man in den gewöhnlichen Tabellen nicht antrift, ohne weitläuftige Rechnung finden, wenn sie auch nicht durch die Multiplication ganzer Zahlen entstanden sind, als in welchem Falle man nur die Logarithmen der Factoren addiren darf (§. 126.). In den kleinen Tabellen sind nur, wie ich bereits oben erinnert habe, die Logarithmen von 1 bis 10000 enthalten. Gesetzt nun, man hätte den Logarithmum von 86759 nöthig, so könnte man denselben, ohne einen sonderlichen Fehler zu begehen, folgendergestalt finden. Man lasse zuerst die letzte Zifer von dieser Zahl rechter Hand weg, um eine Zahl zu erhalten, von welcher man den Logarithmum in den Tabellen noch findet. Bestünde die gegebene Zahl aus 6 Zifern, so müßte man davon 2, bestünde sie aus 7 Zifern, 3, u. s. w. weglassen. Sowohl von der Zahl 8675, als auch von der nächst grössern 8676 suche man die Logarithmen, und mache daraus die Logarithmen von 86750 und 86760 (§. 132.), zwischen welche der verlangte Logarithmus von 86759 fallen muß. Nun subtrahire man sowohl die Zahlen, als auch ihre Logarithmen von einander, um ihre Unterschiede zu erfahren, und schließe: wie sich verhält der Unterschied

der

der ersten und dritten Zahl zu dem Unterschiede der andern und dritten; so verhält sich auch der Unterschied des ersten und dritten Logarithmi, zu dem Unterschiede des unbekannten andern und dritten Logarithmi. Hat man nun durch die Regel Detri diesen Unterschied, den ich unterdessen x nennen will, gefunden, so braucht man nichts weiter zu thun, als ihn zu dem kleinern Logarithmo zu addiren, um den gesuchten Logarithmum zu erhalten. Es wird nämlich hier die größte Zahl die erste, und die kleinste die dritte genannt. Man kann auch folgendergestalt schließen: wie sich der Unterschied der ersten und dritten Zahl zu dem Unterschiede der ersten und andern verhält, so verhält sich auch der Unterschied des ersten und dritten Logarithmi zu dem Unterschiede des ersten und andern. Alsdenn muß man aber den gefundenen Unterschied von dem Logarithmo der erstern, nämlich der grössern Zahl abziehen.

log. 8675 = 3.9382695

log. 86750 = 4.9382695 (§. 132.)
log. 8676 = 3.9383195

1) log. 86760 = 4.9383195
3) log. 86750 = 4.9382695

Unterſch. der Zahlen 10 Unterſch. der L. 500

2) log. 86759 = ...
3) log. 86750 = 4.9382695

Unterſch. der Zahlen 9 Unterſch. der Log. x

$$10 : 9 = 50 : x$$

$$\frac{9}{}$$

$$450 = x$$

$$\log. 86750 = 4.9382695$$

$$x = 450$$

$$\log. 86759 = 4.9383145$$

§. 136.

Auf eben die Art kann man auch zu einem Logarithmo, der grösser ist, als die Logarithmen in den gewöhnlichen Tabellen, die dazu gehörige Zahl finden. Es sey z. E. der Logarithmus 4.9383145 gegeben; man verlangt die dazu gehörige Zahl zu wissen. Man suche erstlich diesen Logarithmum unter einer kleinern Kennzifer, z. E. unter der Kennzifer 3 in den Tabellen, und wenn man keinen Logarithmum findet, der eben diese Decimalbrüche hat, so nehme man sowohl den nächst kleinern, als auch den nächst grössern, und mache die Kennzifer eines jeden so groß, als die Kennzifer des gegebenen Logarithmi ist; zu den Zahlen aber setze man so viel Nullen rechter Hand, als man Einheiten zu der Kennzifer des Logarithmi gesetzt hat (§. 132.). Hierauf ziehe man den nächst kleinern Logarithmum von dem nächst grössern, so wie auch die dazu gehörigen Zahlen von einander ab. Ferner subtrahire man den nächst kleinern Logarithmum von dem gegebenen, und suche zu den beyden Unterschieden der Logarithmen, und dem Unterschiede der Zahlen die vierte Proportionalzahl, wie folgende Rechnung zeiget.

Der nächst kleinere Logarithmus unter der Kennzifer 3 ist vermöge der Tabellen:

3. 9382695 = log. 8675

folglich 4. 9382695 = log. 86750 (§. 132.)

Der nächst grössere Logarithmus ist:

3. 9383195 = log. 8676

folglich 4. 9383195 = log. 86760 (§. 132.)
subtr. 4. 9382695 = log. 86750

Untersch. der Log. 500. Untersch. der Zhl. 10

der gegebene Log. 4. 9383145 = ...
der nächst kleinere 4. 9382695 = log. 86750

Unterschied der Logarithmen 450. Untersch. der Zhl. x

$$5\text{ø}\text{ø} : \underline{45\text{ø}} = 1\text{ø} : x \quad (\S.\ 134.)$$
$$5) \ 9 = x$$

Da nun 9 der Unterschied zwischen der bekannten kleinern Zahl 86750 und der unbekannten grössern Zahl ist, so muß die gesuchte Zahl selbst 86750 + 9 das ist 86759 seyn.

Anhang

von den üblichsten Münzen, Maaße und Gewichte.

1. Von den Münzen. (*)

1. Goldmünzen.

Ein alter Louisd'or und Friedrichsd'or gilt	5 Thaler.
Ein Louis neuf oder Schild-Louisd'or, welcher 24 Livres enthält, ingleichen eine Caroline	6 Th. 4 bis 6 Gr.
Ein Holländ. und Oesterr. Ducaten	2 Th. 20 Gr.
Ein Dänischer Ducaten	2 Th. 6 bis 7 Gr.
Ein Venetianischer Ducaten Cour.	1 Th. 2 Gr.
Ein Imperial, eine Rußische Münze, die 10 Rubeln beträgt,	11 Th. 12 bis 16 Gr.
Eine Guinee, eine Engl. Münze, welche 21 Schillinge enthält,	6 Th. 7 bis 10 Gr.

Ein

*) Der Werth der fremden Münzen wird nach Conventionsgelde bestimmt. Da aber das Verhältniß der verschiedenen Münzsorten gegen einander nicht beständig einerley bleibt, so dürfen sich Anfänger nicht wundern, wenn sie in andern Verzeichnissen den Werth einer fremden Münze bald um kleiner, bald grösser finden.

Ein ganzer Souverain oder Severin, Oesterr. Münze, welche den Werth von 3 Ducaten hat,	8 Th. 12 Gr.
Ein Max d'or	4 Th. 3 Gr.
Eine Zechine, Venet. Geld,	2 Th. 12 Gr.

2. Silbermünzen.

Ein Species-Thaler	1 Thaler 8 Gr.
Ein Thaler, oder sogenannter Reichs-Thaler	24 gute Gr.
oder	30 Kayser Gr.
oder	36 Marien Gr.
oder	5 Tümpfe
oder	90 Preußische Gr.
Ein Meißnischer Gülden	21 Gr.
Ein Kayser-Gulden	16 Gr.
oder	20 Kayser Gr.
Ein Preußischer Gulden	8 gute Gr.
oder	30 Preuß. Gr.
Ein Pohlnischer Gulden	4 gute Gr.
Eine Mark, in Hamburg	8 bis 9 Gr.
Eine dänische Mark	$4\frac{1}{2}$ Gr.
Ein Orthsthaler	6 Groschen
Ein Tümpf	4 Gr. $9\frac{3}{5}$ Pf.
oder	18 Preuß. Gr.
Ein ganzer Batzen	16 Pf.
Ein Groschen, der auch ein guter Groschen genannt wird,	12 Pf.
oder	3 gute Kreutzer
oder	5 Schlesische Gröschel
Ein Kayser-Groschen	3 Kayser-Kreutzer
oder	4 Schlesische Gröschel
Ein Marien-Groschen	8 Pf.

Ein Albus	7 Pf.
Ein Schilling in Niedersachen	6 bis 7 Pf.
Ein guter Kreutzer	4 Pf.
Ein Kayser-Kreutzer	$3\frac{1}{5}$ Pf.
Ein Preußischer oder Polnischer Groschen	3 Schillinge.
oder	$3\frac{1}{5}$ Pf.
Ein Schlesisches Gröschel oder sogenannte Fledermaus	$2\frac{2}{3}$ Pf.
Ein Pfennig	2 Heller
Ein Albertus-Thaler, Holländ. M.	1 Th. 9 Gr.
Ein Holländischer Gulden	12 bis 13 Gr.
Ein Rubel, Rußische M. welche 10 Grieven oder 100 Copeken enthält,	1 Th. 4 bis 6 Gr.
Ein Piaster in Spanien und Portugall	1 Th. 6 Gr.
Ein Real in Spanien	3 Gr.
Ein Real in Portugall	1 Gr. 5 Pf.
Ein französischer Laubthaler, oder sogenannter grosser Thaler, welcher 6 Livres beträgt,	1 Th. 14 Gr.
Ein Französischer kleiner Thaler, zu 3 Livres gerechnet,	19 Gr.
Ein Livre, auf welchen 20 Sols gerechnet werden,	6 Gr. 4 Pf.

Ein

NB. Verschiedene von diesen Münzen sind nicht wirklich geprägtes Geld, sondern angenommene Summen, nach denen man sich im gemeinen Leben richtet. Es giebt z. E. keine geprägte Meißn. Gülden in Sachsen, keine geprägte Pfund Sterling in England, keine geprägte Livres in Frankreich, u. s. f. welches aber im Rechnen selbst keinen Unterschied macht.

Ein Pfund Sterling in England, welches 20 Schillinge enthält,		6 Th.
Ein Beutel in der Türkey		500 Th.
Eine Krone in Dännemark		18 Gr. 8 Pf.

II. Von dem Gewichte.

1. Kramergewichte.

Ein Centner (*) wiegt		5 Stein
oder		110 Pfund
Ein Pfund		32 Loth
Ein Loth		4 Quentchen
Ein Quentchen		4 Pfennig-Gew.
Ein Pfennig-Gewicht		2 Heller-Gewicht.

2. Gold- und Silbergewichte.

Eine Mark wiegt		8 Unzen
oder		116 Loth
oder		24 Karath
Eine Unze		2 Loth
Ein Loth		6 Gran
Ein Karath		4 Gran
Ein Gran		3 Grän

3. Apo-

*) In einigen Orten rechnet man nur 100, in andern 102, 108, 112 Pfund auf den Centner, daher die Pfunde nicht überall gleich schwer sind. Das Fleischergewichte trift in Centnern und Steinen mit dem Kramergewichte überein; nur die Pfunde sind bey dem Fleischergewichte schwerer, als bey dem Kramergewichte; nämlich 51 Pfund Fleischergewichte gleichen 55 Pfunden Kramergewichte.

3. Apothekergewichte.

Ein Pfund wiegt		12 Unzen
	oder	
Eine Unze		24 Loth
Ein Drachma		8 Drachma
Ein Scrupel		3 Scrupel
		20 Gran

4. Schiffsgewichte.

Eine Last hält		12 Schiffpfund
	oder	
Ein Schiffpfund		36 Centner
Ein Ließpfund		20 Ließpfund
		14 Pfund.

III. Von dem Maaße.

1. Längen-Maaß.

100 Leipziger Ellen, oder 200 Leipziger Werkschuhe betragen so viel als

	97, 28	Dresdner Ellen.
oder	174, 33	Pariser Schuhe.
oder	185, 88	Englische Schuhe.
oder	180, 42	Rheinländische Schuhe.
oder	82, 37	Brab. Ellen.
oder	79, 28	Dänische Ellen.
oder	78, 84	Hamburger Ellen.
oder	86, 49	Nürnberger Ellen.
oder	97, 33	Warschauer Ellen.
oder	74, 13	Wiener Ellen.
oder	61, 78	Englische Yards.
oder	78.	Rußische Arschins.
oder	48.	Pariser Stäbe.

Eine

Eine Leipziger Ruthe beträgt	15	Leipz. Werkschuh.
und in manchen Fällen	$15\frac{1}{6}$	Werkschuh.
Eine Elle enthält	2	Schuh.
Ein Schuh	12	Zoll.
Eine Toise macht	6	Pariser Schuhe
Eine Rheinländische Ruthe	12	Rheinl. Schuhe.
Eine Klafter	6	Schuhe oder 3 Ellen.

Eine gemeine deutsche Meile enthält	2000	Rh. Ruthen.
oder	24000	Rh. Schuh.
Eine geographische Meile	23629	Rh. Fuß.
Eine Sächsische Policey-Meile	16000	Dreßd. Ellen.
oder	29333	Rh. Schuh.

68 Sächsische Policey-Meilen gleichen 83 geographischen Meilen, von denen 15 einen Grad ausmachen.

Eine Englische Meile	5172	Rheinl. Schuhe.
Eine grosse Franz. Meile	17852	= =
Eine mittlere	15244	= =
Eine kleinere	12444	= =
Eine Italiänische Meile	5907	= =
Eine Spanische Meile	19691	= =
Eine Schwedische Meile	47258	= =
Eine Rußische Werste	3375	= =

2. Getreyde-Maaß.

Eine Last enthält	3	Wispel.
oder bey Gerste und Hafer	2	Wispel.

Ein Wrspel	2 Malter.
Ein Malter	12 Scheffel.
Ein Scheffel	4 Viertel.
Ein Viertel	4 Metzen.
Eine Metze	4 Mäßchen.

3. Wein-Maaß.

Ein Fuder enthält	4 Orhoft.
Ein Orhoft	$1\frac{1}{2}$ Ohm.
Ein Ohm	2 Eymer.
oder	4 Anker.
oder	40 Stübchen.
oder	160 Kannen.

4. Bier-Maaß.

Ein Gebräude hält	9 Kupen.
Eine Kupe	2 Faß.
Ein Faß	2 Tonnen.
Eine Tonne	4 Oehmchen
Ein Oehmchen	24 oder 25 Kan.
Eine Kanne	2 Nößel.

Die Geometrie.

Erstes Capitel.

Erklärungen und Grundsätze.

§. 1.

Von den unstetigen Grössen, mit welchen wir uns bisher in der Arithmetik beschäftiget haben, wollen wir nunmehr zu den stetigen fortgehen, deren Eigenschaften und Ausmessung die **Geometrie** erkläret, wie schon in dem Vorberichte von den mathematischen Wissenschaften überhaupt (§. 6.) angemerkt worden ist. Das Wort **Geometrie** bedeutet zwar eigentlich nichts anders, als eine **Erdmeßkunst**, und zu der Zeit, da diese Wissenschaft erfunden worden ist, mag sie auch wohl nichts anders gewesen seyn, als eine ungebildete Kunst, Felder und Wiesen auszumessen. Denn die Meynung derer ist nicht unwahrscheinlich, welche behaupten, das Egypten ihr Vaterland sey, wo die jährlichen Ueberschwemmungen des Nils die Einwohner genöthiget hätten, auf eine genaue Ausmessung ihrer Felder und Bestimmung ihrer Grenzen bedacht zu seyn. Allein zu unsern Zeiten würde man sich einen viel zu eingeschränkten Begriff von dieser wichtigen Wissenschaft machen, wenn man glauben wollte, daß sie nichts

anders enthielte, als eine Sammlung von Sätzen und Regeln, durch deren Hülfe man gewisse Ausmessungen auf dem Felde vornehmen könnte. Ihr Umfang und Nutzen erstreckt sich unendlich weiter, indem sie nicht blos eine besondre Gattung, sondern alle Arten von ausgedehnten Größen betrachtet, und am Himmel sowohl als auf der Erde gebraucht werden kann. Ohne die Hülfe der Geometrie würden uns weder die Gesetze, nach denen sich die Bewegung der festen und flüßigen Körper richtet, noch die Eigenschaften des Lichts, noch die Grösse und Entfernung der himmlischen Weltkörper, noch viele andre nützliche Wahrheiten bekannt seyn. Man hat daher auch nicht wohl gethan, daß man das Feldmessen, welches blos eine einzige und geringe Anwendung der Geometrie ist, die practische Geometrie überhaupt genannt hat, weil Anfänger durch diese Benennung sehr oft zu der irrigen Meynung verleitet werden, daß die Geometrie ausser dem Feldmessen keinen sonderlichen Nutzen habe.

§. 2.

Alle Körper, die in der Welt vorhanden sind, haben diese gemeinschaftliche Eigenschaft, daß sie einen gewissen Raum ausfüllen und nach allen Gegenden zu ausgedehnt sind. Dieser Raum nun, den die wirklichen Körper einnehmen, oder ihre körperliche Ausdehnung, sondert der Geometra in Gedanken von ihrer Materie ab, und betrachtet sie ganz allein in der Geometrie, ohne die übrigen Eigenschaften der wirklichen Körper mit in Erwegung zu ziehen. Man pflegt daher diese körperliche Ausdehnung einen geometrischen Körper zu nennen, den man also

mit

mit dem wirklichen oder sogenannten physikalischen Körper nicht verwirren muß. Ein geometrischer Körper ist folglich nichts anders, als eine umgränzte stetige Grösse, die nach allen Gegenden zu ausgedehnt ist. Sonst sagt man auch, ein Körper ist diejenige Grösse, die eine Länge, Breite und Dicke hat.

§. 3.

Dasjenige, wo eine Sache aufhört, nennt man ihre **Grenze**. Wenn man nun in Gedanken die Grenzen eines Körpers von dem Körper selbst absondert, und dieselben besonders betrachtet, so erlangt man den Begriff von einer **Fläche**, die also nur in die Länge und Breite ausgedehnt seyn, aber keine Dicke haben kann. Denn wollte man auch bey den Flächen eine gewisse Dicke annehmen, so würde man sich einen Körper, und nicht die Grenzen eines Körpers vorstellen. Die Grenzen der Flächen heissen **Linien**, die also nur in die Länge ausgedehnt seyn, und keine Breite haben können, weil sie sonst selbst Flächen und nicht Grenzen derselben seyn müßten. Die Gränzen der Linien heissen **Punkte**, denen also ganz und gar keine Ausdehnung zukommen kann. Weil es nun drey Arten von stetigen Grössen giebt, nämlich Linien, Flächen und Körper; so pflegen einige die Geometrie in drey Haupttheile zu zergliedern. Der erste Theil, welcher von den Linien handelt, wird **Longimetrie**, der andre, welcher sich mit den Flächen beschäftiget, **Planimetrie**, und der dritte, dessen Gegenstand die Körper sind, **Stereometrie** genannt. Doch lassen sich die ersten beyden Theile, wenn man in den Beweisen die gehörige Ge-

nauigkeit beobachten will, nicht gut von einander trennen; daher die meisten Schriftsteller entweder gar keine Abtheilung machen, oder wenigstens nur zwey Haupttheile annehmen.

§. 4.

Wer die vorigen Erklärungen gehörig überdenkt, der wird leicht einsehen, daß die Namen, Flächen, Linien und Punkte u. s. f. lauter abstracte Begriffe anzeigen, welche, wie alle abstracte Begriffe, nicht einzeln, sondern in Verbindung mit andern wirklich existiren können. Es ist daher lächerlich, wenn einige Gelehrte, denn ungelehrten Personen wäre ein solcher Fehler leicht zu verzeihen, diese Erklärungen für Grillen, und die Gründe der ganzen Geometrie für Chimären ausgeben wollen. Es ist wahr, es giebt in der Welt kein Ding, das bloß eine Länge ohne Breite und Dicke, oder eine Länge und Breite ohne Dicke u. s. f. hätte. Allein es giebt Fälle, wo man bloß die Länge und Breite, oder bloß eine Länge, ohne Breite und Dicke, zu wissen nöthig hat. Wenn man z. E. nach der Größe eines Feldes fragt, so verlangt man nur eine Kenntniß von seiner Ausdehnung in die Länge und Breite ohne Dicke. Wer an einen gewissen Ort reisen will, fragt nicht, wie breit, sondern blos wie lang der Weg sey, u. s. w. Es war also sehr nöthig, diese verschiedenen Begriffe von einander abgesondert zu betrachten. Es giebt keine Gelehrsamkeit ohne Gelehrten, keine Tugend ohne einen Tugendhaften, und doch pflegt man sich die Gelehrsamkeit, Tugend und tausend andre Dinge, abgesondert von denen, woran sie sich befinden, in andern Wissenschaften vorzustellen, ohne den Vorwurf

wurf zu hören, daß dergleichen Begriffe blosse Chimären enthielten.

§. 5.

Ein Körper ist also nicht aus Flächen, eine Fläche nicht aus Linien, und eine Linie nicht aus Puncten zusammengesetzt. Es ist auch eigentlich nicht möglich, eine mathematische Linie oder einen Punct zu machen. Man muß sich daher begnügen, die Punkte durch kleine physikalische Körperchen, die eine sehr geringe Ausdehnung haben, dergleichen die kleinen Klümchen von Kreide, Bleystift oder Tusche sind, und die Linien durch eine Reihe solcher Körperchen, bey denen die Dicke und Breite nicht sehr merklich ist, in der Ausübung abzubilden.

§. 6.

Wenn alle Theile einer Linie nach einerley Richtung liegen, so wird sie eine **gerade Linie** (Fig. 1. Tab. 1.) genannt. Haben aber nicht alle Theile einerley Richtung, so heißt sie eine **krumme Linie.** (Fig. 2. Tab. 2.) Bisweilen sind Linien aus geraden und krummen zusammengesetzt, welche man **vermischte Linien** zu nennen pflegt.

§. 7.

Man nimmt zum Maaß der Linien in der Geometrie eine gewisse Länge an, die man eine **Ruthe** nennt, und die, wie alle Maaße, nicht an allen Orten von einerley Grösse ist. Die Ruthe theilt man in zehn gleiche Theile und nennt einen solchen Theil einen **Fuß** oder **Schuh**; der zehnte Theil eines Schuhs heißt ein **Zoll**, und der zehnte Theil eines Zolls eine **Linie.** Bisweilen theilt man auch die

Linie noch aufs neue in 10 gleiche Theile, welche einige Scrupel zu nennen pflegen. Die Ruthen bezeichnet man mit °, die Schuhe mit ', die Zolle mit '', und die Linien mit '''. So bedeutet z. E. 75°, 3', 8'', 7''', eine Länge von 75 Ruthen, 3 Schuhen, 8 Zollen und 7 Linien. Diese Eintheilung verschaffet im Rechnen eine große Bequemlichkeit, weil man die Ruthen in Schuhe, Zolle, und Linien ohne Multiplication, und eine ansehnliche Summe von Linien in Zolle, Schuhe und Ruthen ohne Division verwandeln kann. So ist z. E. 75°, 3', 8'', 7''' so viel als 75387'''; denn vermöge der angenommenen Eintheilung ist

75°	= 750'	= 7500''	= 75000'''
3'	=	30''	= 300'''
8''		=	80'''
7'''		=	7'''

75°, 3', 8'', 7''' = 75387''' (§. 13.)

Will man daher umgewendet eine Summe von Linien in Zolle, Schuhe und Ruthen verwandeln; so darf man nur, von der Rechten gegen die Linke zu, eine Zifer für die Schuhe abschneiden, die übrigen Zifern werden Ruthen bedeuten. Z. E. 4382576925''' enthalten 4382576°, 9', 2'', 5'''.

§. 8.

Die Ruthen werden im gemeinen Leben noch auf verschiedene andre Art eingetheilt. So pflegt man die sogenannte Rheinländische Ruthe in 12 Schuh, den Schuh in 12 Zoll u. s. f. einzutheilen. Die Leipziger Ruthe enthält 15 Werkschuhe, welche so

viel

viel halbe Leipziger Ellen betragen. Die Französische Ruthe oder Toise enthält nur 6 pariser Fuß, welche um $\frac{105}{1000}$ grösser sind, als 6 Rheinländische Schuhe. Den pariser Fuß aber theilt man in 12 Zoll, den Zoll in 12 Linien, und die Linie in 10 Scrupel, welche Eintheilung man genau merken muß, wenn man gewisse Maase, die in der Naturlehre vorkommen, verstehen will.

§. 9.

Eine ebene Fläche oder eine Ebene (Planum, Superficies plana) ist eine solche Fläche, auf welche man überall eine gerade Linie dergestalt legen kann, daß alle Punkte der Linie auf die Fläche selbst fallen. Diejenigen Flächen, wo dieses nicht überall möglich ist, werden **unebene** oder **krumme Flächen** genannt.

§. 10.

Gerade Linien, welche sich auf einer ebenen Fläche befinden, und niemals zusammen stossen können, wenn sie auch auf beyden Seiten ohne Ende verlängert würden, wie BD und FG (Tab. 1. Fig. 3) heissen **parallele** oder **gleichlaufende Linien**, weil sie überall einerley Abstand von einander haben. Auch Cirkelbögen und andre krumme Linien, ingleichen Flächen werden parallel genannt, wenn sie überall gleichweit von einander abstehen. Diejenigen Linien aber auf einer ebenen Fläche, die irgendwo zusammenstossen würden, wenn man sie auf beyden Seiten verlängerte, wie NP und QR (Fig. 4. Tab. 1.) werden in derjenigen Gegend, wo sie sich einander nähern, **convergent**, und auf der andern

Seis-

Seite, wo sie sich von einander entfernen, divergent genannt.

§. 11.

Die Neigung zweyer Linien, die einander in einem Punkte berühren oder durchschneiden, heißt ein **Winkel**, oder wenn man sich genauer ausdrückt, ein ebener **Winkel** (angulus planus); denn die Ecken der Körper, zum Beyspiel N. R. (Fig. 99. Tab. 11.) oder C. G. (Fig. 100.) die aus drey oder mehr ebenen Winkeln bestehen, werden auch **Winkel**, aber zum Unterschiede von jenen, **körperliche Winkel** (anguli solidi) genannt. Die Linien selbst, deren Neigung den Winkel ausmachen, wie BC und CA (Fig. 5. Tab. 1.) heissen seine **Schenkel** (crura) und der Punct C, wo sie zusammen kommen, die **Spitze** oder der **Scheitel** des Winkels (vertex anguli). Man benennet die Winkel, deren Zeichen $<$ ist, welches man aber nicht allemal zu gebrauchen pflegt, auf dreyerley Art, nämlich entweder durch einen Buchstaben, den man aussen an die Spitze setzt, oder durch einen kleinen Buchstaben, den man inwendig zwischen die Schenkel schreibt, oder durch die drey Buchstaben, die man an die Spitze des Winkels und an die Endpuncte der Schenkel gesetzt hat; doch muß in diesem Falle der Buchstabe, welcher am Scheitel des Winkels steht, allemal in die Mitte gesetzt werden. Der Winkel DCB (Fig. 5. Tab. 1.) den man auch durch den einzigen Buchstaben o bezeichnen könnte, wäre also der Winkel, den die beyden Linien DC und BC mit einander machen.

§. 12.

§. 12.

Winkel über einer geraden Linie, wie o und u (Fig. 5.) **die einen gemeinschaftlichen Schenkel und eine gemeinschaftliche Spitze haben, werden Nebenwinkel** (anguli deinceps positi) **genannt, wenn die andern beyden Schenkel z. E. DC und CA, nach einerley Richtung liegen, oder eine einzige gerade Linie ausmachen.**

§. 13.

Steht eine gerade Linie auf einer andern geraden Linie dergestalt, daß die Neben-Winkel gleich sind, so heißen beyde Linien senkrecht oder perpendiculär, und dergleichen Nebenwinkel rechte Winkel (anguli recti). **So steht** (Fig. 6. Tab. 1.) NC **auf** AB **senkrecht; und die beyden Winkel** x **und** y **sind rechte Winkel, die man bisweilen durch den Buchstaben** R **anzuzeigen pflegt. Auf einer ebenen Fläche steht eine Linie alsdenn senkrecht, wenn sie mit allen Linien auf der Fläche, die sich aus dem Punct, wo sie aufsteht; ziehen lassen, lauter gleiche Winkel macht. Soll also** (Fig. 7. Tab. 1.) **die Linie** DC, **die man sich ausserhalb der Fläche des Papiers vorstellen muß, senkrecht auf dieser Fläche stehen, so müssen die Winkel** DCB, DCF, DCQ, DCG, DCN **und** DCA **alle gleich groß, und folglich rechte Winkel seyn.**

§. 14.

Alle übrigen Winkel, die nicht rechte Winkel sind, wie o **und** u, (Fig. 5.) **heißen schiefe Winkel** (anguli obliqui), **und zwar werden diejenigen**

schiefen Winkel, die kleiner sind, als rechte Winkel, d. i. deren Schenkel eine geringere Entfernung von einander haben, als die Schenkel der rechten Winkel, **spitzige Winkel** (anguli acuti), solche aber, die größer sind, als rechte Winkel, **stumpfe Winkel** (anguli obtusi) genannt. So ist (Fig. 5.) a ein spitziger, und o ein stumpfer Winkel.

§. 15.

Eine Fläche, die in Linien eingeschlossen ist, heißt eine **Figur**, und die Linien, welche die Grenzen derselben ausmachen, ihre **Seiten** (latera). Wenn diese Seiten gerade Linien sind, so heißt auch die Figur eine **geradlinichte**, wenn es aber krumme Linien sind, eine **krummlinichte**, und sind es theils gerade, theils krumme Linien, eine **vermischte Figur**. Sind alle Seiten und alle Winkel einander gleich, so wird die Figur **ordentlich** oder **regulär** genannt. Sind aber die Seiten oder die Winkel ungleich, so heißt die Figur **unordentlich** oder **irregulär**. So sind z. E. BDG (Fig. 8.) und ABDQ (Fig. 13.) reguläre, hingegen AGN (Fig. 9.) CNFR (Fig. 14.) und ACHD (Fig. 17.) irreguläre Figuren.

§. 16.

Eine Figur, die drey Seiten hat, heißt ein **Triangel** oder **Dreyeck**. Sind alle Seiten einander gleich, wie in dem Triangel BDG (Fig. 8.) so wird der Triangel **gleichseitig** (triangulum aequilaterum) genannt; sind aber nur zwey Seiten einander gleich, wie in dem Triangel AGN (Fig. 9.) so heißt er ein **gleichschenklichter**, (triangulum aequi-

aequicrurum) und ist keine Seite der andern gleich, wie in dem Triangel ABC (Fig. 10.) ein **ungleichseitiger Triangel** (triangulum scalenum). Man pflegt die Triangel durch die drey Buchstaben zu bezeichnen, die an den Spitzen der Winkel stehen, aber mit Vorsetzung des Zeichens △, um sie von den blossen Winkeln zu unterscheiden.

§. 17.

Ein Triangel, in welchem ein rechter Winkel angetroffen wird, heißt ein **rechtwinklichter**, z. E. △ AGC (Fig. 11. Tab. 1.); ein solcher, in welchem sich ein stumpfer Winkel befindet, wie △ BAC (Fig. 10.), ein **stumpfwinklichter**; und ein solcher, wo alle drey Winkel spitzig sind, z. E. △ MNQ (Fig. 12.), ein **spitzwinklichter Triangel**.

§. 18.

Unter den vierseitigen Figuren heissen die regulären, d. i. diejenigen, die lauter gleiche Seiten und lauter gleiche oder rechte Winkel haben, **Quadrate**, z. E. QABD (Fig. 13. Tab. 1.). Diejenigen, die zwar gleiche Seiten, aber schiefe Winkel haben, von denen nur die gegenüberstehenden gleich sind, werden **Rauten**, (Rhombi) wie CNFR (Fig. 14.); diejenigen, wo nur die gegenüberstehenden Seiten gleich, aber alle Winkel rechte Winkel sind, **Rechtecke**, (Oblonga, Rectangula) z. E. NDSB (Fig. 15.); diejenigen, in denen nur die gegenüberstehenden Seiten, und auch nur die gegenüberstehenden Winkel gleich sind, wie RMBQ (Fig. 16.), **längliche Rauten**, (Rhomboides), und alle

übrigen vierseitigen Figuren, in welchen keine der jetzt erzählten Eigenschaften angetroffen wird, wie DACH (Fig. 17.) **Trapezia** genannt. Sind in einer vierseitigen Figur die gegenüberstehenden Seiten parallel, wie z. E. bey Fig. 13. 14. 15. 16. so pflegt man sie, in Ansehung dieses Umstandes, ein **Parallelogramm** zu nennen.

§. 19.

Die Figuren, die mehr als vier Seiten haben, nennt man überhaupt **Polygone** oder **Vielecke**, und unterscheidet sie blos dadurch von einander, daß man sie von der Anzahl ihrer Seiten oder ihrer Winkel benennt. So ist ein **Sechseck** ein Polygon, das sechs Seiten hat, ein **Siebeneck**, eine Figur, die sieben Seiten hat, u. s. f.

§. 20.

Eine krummlinichte Figur, in welcher alle Puncte ihrer Grenze einerley Abstand von einem gewissen mittlern Puncte haben, wird ein **Cirkel** genannt. (Fig. 18. Tab. 1.). Ein Cirkel entsteht daher, wenn sich eine gerade Linie, z. E. DC, auf einer ebenen Fläche um einen gewissen festen Punct C ganz herum bewegt. Dieser feste Punct C, von welchem alle Puncte der krummen Linie, welche die Grenze des Cirkels ausmacht, und die **Peripherie** genannt wird, gleichweit abstehen, heißt daher der **Mittelpunct** oder das **Centrum**. Ein Stück der Peripherie, wie z. E. QA, heißt ein **Cirkelbogen** (Arcus); jede gerade Linie aus dem Mittelpuncte in die Peripherie, wie CD und CA, ein **Halbmesser, Radius**, oder **Semidiameter**; jede gerade

Li-

Linie von einem Puncte der Peripherie gegen einen andern, wie DA und QR, eine **Chorde** oder **Sehne**, und eine solche Chorde, welche durch den Mittelpunct geht, wie NA, ein **Diameter** oder **Durchmesser**. Haben gerade Linien, die sich ausserhalb dem Cirkel befinden, nur einen einzigen Punct mit der Peripherie des Cirkels gemein, gesetzt auch, daß man sie auf beyden Seiten ohne Ende verlängerte, wie BN, so werden sie **Berührungslinien** oder **Tangenten** genannt. Derjenige Theil eines Cirkels, dessen Grenzen ein Bogen und zwey Halbmesser sind, heißt ein **Sector** oder **Ausschnitt**, wie z. E. das Stück CDA; ein solcher Theil aber, der durch einen Cirkelbogen und durch eine Sehne begrenzt ist, z. E. das Stück RQ ein **Segment** oder **Abschnitt**. Das gewöhnliche Instrument, womit man Cirkel zu beschreiben pflegt, und welches ebenfalls ein Zirkel *) heißt, ist hinlänglich bekannt.

§. 21.

Man theilt die Peripherie eines jeden Cirkels in 360 gleiche Theile, und nennt einen solchen Theil einen **Grad**. Den Grad theilt man aufs neue in 60 gleiche Theile oder **Minuten**, und die Minuten wieder in 60 gleiche Theile oder **Secunden** ein. Die Grade bezeichnet man mit °, wie die Ruthen, die Minuten mit ' wie die Schuhe, und die Secunden mit " wie die Zolle. Man nimmt in der Geo-

*) Man kann das Instrument von der Figur dadurch unterscheiden, wenn man nach dem Beyspiele einiger Schriftsteller das erste mit einem Z, und andre mit einem C schreibt.

metrie zum Maasse der Winkel Cirkelbogen an, die man mit einem willkührlichen Halbmesser aus der Spitze der Winkel zwischen ihren Schenkeln beschreibet, und benennt einen Winkel von der Zahl der Grade, welche ein solcher Bogen enthält. So würde man z. E. den Winkel A (Fig. 19. Tab. 2.) einen Winkel von 62 Graden nennen, wenn der Bogen BC 62 Grade, d. i. $\frac{62}{360}$ von der Peripherie seines Cirkels enthielte. Damit man auch nicht nöthig habe, bey einer jeden Messung eines Cirkelbogens, diese Eintheilung vorzunehmen, so pflegt man von Meßing, Elfenbein oder andern Materien ganze und halbe Cirkel zu verfertigen, und nach der jetzt beschriebenen Art einzutheilen. Man nennt solche Instrumente daher **Winkelmesser**, und wenn sie blos auf dem Papiere gebraucht werden, **Transporteurs**. Diejenigen Winkelmesser, deren man sich auf dem Felde bedient, heißen gemeiniglich **Astrolabia**, weil man sich sonst ihrer Hülfe auch am Himmel zu bedienen pflegte. Enthalten sie nur den vierten Theil der Peripherie, so pflegt man sie **Quadranten** zu nennen.

§. 22.

Die Auflösung einer Aufgabe, oder die Construction wird **geometrisch** genannt, wenn man sich dabey keines andern Instruments, als des Zirkels und Lineals bedient, und aus den Grundsätzen der Geometrie einen richtigen Beweiß davon geben kann. Nimmt man aber zu andern Mitteln seine Zuflucht, z. E. zu einem Transporteur u. s. f. oder sucht man blos die verlangte Sache durch Probiren zu erhalten, so heißt die Construction **mechanisch**, wenn

wenn man sich auch gleich dabey keines andern Instruments als des Zirkels und Lineals bedient.

§. 23.

Zwey Längen oder Flächen decken einander nach der Sprache der Geometrie (congruunt), wenn man sie dergestalt auf einander legen kann, daß alle Grenzen der einen auf die Grenzen der andern fallen.

§ 24.

Wenn der Raum, den zwey Linien oder Flächen oder Körper einnehmen, einerley Grösse hat, so werden sie gleich genannt, gesetzt auch, daß er nicht einerley Figur haben sollte. Es kann daher z. E. ein Triangel einem Quadrate gleich seyn. Winkel heissen gleich, ob schon ihre Schenkel eine verschiedene Länge haben, wofern nur die Neigung derselben einerley ist. Man sagt daher von zwey Winkeln, daß sie einander decken, wenn nur ihre Spitzen und Schenkel, obgleich nicht die Endpuncte ihrer Schenkel auf einander fallen.

§. 25.

Sowohl die Linien als auch die Flächen und Körper werden ähnlich genannt, wenn ihre Theile einerley Lage und Verhältniß haben. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ∽.

Postulata.

§. 26.

Von einem jeden Puncte gegen einen jeden andern Punct eine gerade Linie zu ziehen.

§. 27.

Jede Linie ohne Ende zu verlängern oder zu verkürzen, und sie einer jeden geraden Linie gleich zu machen.

§. 28.

Mit jeder geraden Linie und aus jedem Punkte einen Cirkel zu beschreiben.

Axiomata.

§. 29.

Alle Radien, ingleichen alle Diameter eines Cirkels, oder gleicher Cirkel sind einander gleich; und wenn zwey Cirkel gleich grosse Durchmesser oder Halbmesser haben, so müssen sie einander selbst gleich seyn.

§. 30.

Zwischen zwey Punkten ist zwar eine unendliche Anzahl krummer Linien, aber nur eine einzige gerade Linie möglich, welche die kürzeste unter allen ist. Durch die beyden Endpuncte wird daher die Grösse und Lage einer geraden Linie völlig bestimmt.

§. 31.

Zwey gerade Linien können einander nur in einem einzigen Puncte berühren oder durch=

durchschneiden, und folglich keinen Raum einschliessen. Ein geradelinichtes Zweyeck ist also unmöglich.

§. 32.

Zwey Seiten in einem geradelinichten Triangel zusammen genommen sind allemal grösser, als die dritte Seite.

§. 33.

Alle Linien, alle Winkel und alle Figuren, die einander decken, sind einander gleich.

Dieser Grundsatz wird das principium congruentiae genannt.

§. 34.

Alle Linien, und alle Winkel, die einander gleich sind, müssen einander decken.

Von den Figuren gilt dieses nicht, wofern sie nicht zugleich einander ähnlich sind. Ein Dreyeck kann so groß seyn, als ein Viereck, aber unmöglich ein Viereck decken (§. 23. 24.).

§. 35.

Die Peripherien zweyer Cirkel können einander nur in zwey Puncten durchschneiden, und es kann davon nicht mehr als ein einziger Durchschnittspunkt S über die gerade Linie AC fallen, die durch die Mit-

telpuncte dieser Cirkel sich ziehen läßt (Fig. 24. Tab. 2.).

§. 36.

Alle gleiche Winkel haben einerley Maaß, und wenn Winkel einerley Maaß haben, so müssen sie einander gleich seyn.

Zweytes Capitel.

Von den Linien, Winkeln und Figuren, in Ansehung ihrer Gleichheit.

§. 37.

Lehrsatz. Wenn in einem geradelinichten Triangel ein Winkel so groß ist, als ein Winkel in einem andern geradelinichten Triangel, und über dieses die beyden Seiten, welche diesen Winkel einschliessen, in beyden Triangeln einerley Grösse haben; so muß auch die dritte Seite in dem ersten Triangel so groß seyn, wie die dritte Seite in dem andern Triangel, ferner müssen auch die übrigen beyden Winkel, nämlich diejenigen, die einerley Seiten gegenüber stehen, und die ganzen Triangel selbst einander gleich seyn.

Es sey (Fig. 30. Tab. 2.) die Bedingung oder Hypothesis

a = A
ac = AC
ab = AB

---

so ist der Satz selbst oder die Thesis

cb = CB
c = C
b = C
△ acb = △ ACB

Beweis.

Man lege den Triangel abc in Gedanken über den Triangel ABC dergestalt, daß die Endpuncte der Seite ab im ersten Triangel auf die Endpuncte der Seite AB des andern Triangels fallen; welches deswegen angeht, weil diese beyden Seiten, vermöge der angenommenen Bedingung, einander gleich sind (§. 34.). Da nun auch der Winkel a dem Winkel A, und der Schenkel ac dem Schenkel AC gleich gesetzt wird, so müssen nicht nur die Winkel selbst, sondern auch die Endpuncte ihrer Schenkel c und C auf einander fallen. Da ferner der Punct b auf den Punct B gelegt worden ist, so decken nicht nur die geraden Linien cb und CB, weil zwischen zwey Puncten nur eine gerade Linie möglich ist (§. 30.), sondern auch die Winkel c und C, die Winkel b und B, und überhaupt die ganzen Triangel einander, woraus ihre Gleichheit offenbar ist (§. 33.).

§. 38.

Durch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel wird also ein Triangel völlig bestimmt. Es wird daher jeder leicht einsehen, wie man aus diesen drey

drey gegebenen Stücken einen Triangel beschreiben könne. Es sey z. E. (Fig. 28. Tab. 2.) der Winkel G und die beyden Linien DC und AB gegeben. Man trage diese beyden Linien auf die Schenkel des gegebenen Winkels, mache nämlich GC gleich DC und GB = AB, und ziehe die gerade Linie BC, so ist der verlangte Triangel fertig.

§. 39.

Lehrsatz. *Wenn eine Seite in einem geradelinichten Triangel eben die Grösse hat, als eine Seite in einem andern geradelinichten Triangel; und wenn über dieses die beyden anliegenden Winkel in beyden Triangeln einander gleich sind, so folgt daraus, daß auch der dritte Winkel in dem ersten Triangel dem dritten Winkel in dem andern Triangel, ferner die übrigen beyden Seiten, die einerley Winkeln gegenüber stehen, und die Flächen der Triangel selbst einander gleich seyn müssen.*

Bedingung (Fig. 30.) ab = AB
a = A
b = B

Satz. c = C
ac = AC
cb = CB
△ acb = △ ACB

Beweis.

Man lege den einen Triangel acb auf den andern Triangel ACB dergestalt, daß die Endpuncte

der

der Seite ab auf die Endpuncte der Seite AB fallen, welches wegen der angenommenen Gleichheit dieser beyden Seiten geschehen kann. Weil nun der Winkel a so groß ist, als der Winkel A, so muß der Schenkel ac des ersten in diesem Falle auf den Schenkel AC des andern Triangels (§. 34.), und folglich der Punct c in die Linie AC selbst oder in die verlängerte Linie AC fallen. Eben so muß auch die Seite bc wegen der Gleichheit der Winkel b und B auf die Seite BC, und folglich der Punct c entweder in die Linie BC selbst oder in die verlängerte Linie BC fallen. Soll nun der Punct c sowohl in die Linie AC, als auch in die Linie BC kommen, so muß er nothwendig auf den Durchschnittspunct dieser beyden Linien fallen, welches kein andrer als der Punct C seyn kann; weil zwey gerade Linien einander nur in einem einzigen Puncte berühren oder durchschneiden können (§. 31.) Da nun der Punct a auf A, und b auf B gelegt wurde; so ist offenbar, daß die Winkel c und C, ferner die Seiten ac und AC, die Seiten cb und CB, und überhaupt die ganzen Triangel einander decken, und folglich einander gleich seyn müssen (§. 33.)

§. 40.

Aus einer Seite und den beyden anliegenden Winkeln ist also nur ein einziger Triangel möglich; und wenn man aus zwey Winkeln und einer Seite einem Triangel verzeichnen soll, so darf man nur die beyden gegebenen Winkel an die Endpuncte dieser Seite setzen, und ihre Schenkel so lange verlängern, bis sie zusammenstossen. Unter was für Bedingungen aber dieses möglich sey, kann hier noch nicht gezeigt werden.

§. 41.

§. 41.

Lehrsatz. **Wenn alle drey Seiten in einem Triangel eben die Grösse haben, wie die drey Seiten in einem andern Triangel, so müssen auch die Winkel, die einerley Seiten gegenüberstehen, und die Flächen der Triangel selbst einander gleich seyn.**

Es sey (Fig. 30.)

$$\begin{aligned} ac &= AC \\ ab &= AB \\ bc &= BC \end{aligned}$$

so folgt hieraus, daß

$$\begin{aligned} a &= A \\ c &= C \\ b &= B \\ \triangle acb &= \triangle ACB \end{aligned}$$

Beweis.

Man beschreibe mit der Seite ac in dem andern Triangel aus dem Puncte A den Bogen nq, so muß dieser Bogen wegen der Gleichheit der Seiten ac und AC durch den Punct C gehen. Man beschreibe ferner mit der Seite bc aus dem Puncte B den Bogen sr, so muß derselbe, vermöge der Gleichheit der Seiten bc und BC durch eben diesen Punct C gehen, welches also zugleich der Durchschnittspunct der beyden Bogen seyn wird. Nun lege man, wie vorhin, den Triangel acb über den Triangel ACB dergestalt, daß die Endpuncte der Seite ab auf die Endpuncte der Seite AB fallen, welches in diesem Falle wegen der Gleichheit der Seiten ab und AB möglich ist. Weil nun der Bogen nq mit dem Radio ac aus dem Puncte A beschrieben worden, und der Punct a

auf

auf den Punct A gelegt worden ist, so muß der Punct c nothwendig in den Bogen nq selbst, oder in diesen verlängerten Bogen fallen. Aus eben dem Grunde muß auch der Punct c in den zweyten Bogen sr oder in diesen verlängerten Bogen fallen, weil der Bogen sr mit dem Radio bc = BC beschrieben worden. Soll nun der Punct C sowohl in den Bogen nq als auch in den Bogen sr kommen, so muß er nothwendig auf den Durchschnittspunct dieser beyden Bogen, d. i. auf den Punct C fallen, weil über der Linie AB, welche durch die Mittelpuncte dieser Bogen gehet, nur ein Durchschnittspunct möglich ist, wenn man auch beyde Bogen verlängerte (§. 35.). Es decken also die Winkel a und A die Winkel c und C, die Winkel b und B und die ganzen Triangel einander; folglich ist die Gleichheit dieser Winkel und der Triangel selbst hinlänglich erwiesen (§. 33.).

§. 42.

Die Größe eines Triangels und seiner Winkel wird also durch die Größe seiner Seiten vollig bestimmt.

§. 43.

Aufgabe. Ueber eine gegebene Linie einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben.

Auflösung.

Es sey AC (Fig. 24. Tab. 2.) die gegebene Linie, über welche der gleichseitige Triangel beschrieben werden soll. Man beschreibe aus dem Puncte A und aus dem Puncte C, mit der Linie AC, ein Paar

Cir-

Cirkel, die über dieser Linie einander nur in einem einzigen Puncte durchschneiden werden (§. 35.). Diesen Durchschnittspunct S verbinde man durch gerade Linien mit den Endpuncten der gegebenen Linie A und C, so muß der Triangel ASC ein gleichseitiger Triangel seyn.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{lcl} AS & = & AC \\ AC & = & SC \end{array}\right) \quad (\S.\ 29.)$$

$$AS = SC \quad (\S.\ 11.\ Arithm.)$$

In der Ausübung ist es nicht nöthig, daß man die ganzen Cirkel verzeichnet, die hier nur die Deutlichkeit der Demonstration erfordert. Sollte der gleichseitige Triangel nicht über, sondern unter die Linie gesetzt werden, so müßte man aus dem untern Durchschnittspuncte gerade Linien gegen A und C ziehen, wodurch ein Triangel von eben derselben Grösse entstehen und von dem erstern durch nichts als durch die Lage unterschieden seyn würde.

§. 44.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Linien einen gleichschenklichten Triangel zu beschreiben.

Auflösung.

Es mögen FG und CD (Fig. 26. Tab. 2.) die beyden gegebenen Linien seyn. Man erwähle sich eine davon zur Grundlinie, wofern dieses nicht durch die Aufgabe bestimmt ist, und mache z. E. AF so

groß

groß als FG. (§. 27.). Mit der andern Linie DC beschreibe man sowohl aus dem Puncte A, als auch aus dem Puncte F, Cirkel oder nur Bogen, die einander durchschneiden (§. 28.). Aus dem Durchschnittspuncte dieser Bogen C ziehe man gerade Linien gegen die Puncte A und F, so muß der Triangel gleichschenklicht, und seine Seiten den gegebenen Linien gleich seyn.

Beweis.

Daß AF = FG, ist aus der Construction klar, und weil die Bogen, die einander in C durchschneiden, aus dem Puncte A und F mit dem Halbmesser DC beschrieben worden sind, so folgt, daß

$$\left.\begin{array}{rcl} AC & = & DC \\ FC & = & DC \end{array}\right) \text{ (§. 29.)}$$

$$AC = FC$$

und folglich ist der Triangel ACF gleichschenklicht (§. 16.). Will man die grössere von den beyden gegebenen Seiten zur Grundlinie annehmen, so ist nur alsdenn ein gleichschenklicher Triangel möglich, wenn die kleinere Linie FG mehr als die Hälfte der größern CD beträgt; weil zwey Seiten in einem geradelinichten Triangel zusammengenommen allemal grösser, als die dritte seyn müssen (§. 32.).

§. 45.

Aufgabe. Aus drey gegebenen Linien, von denen jede kleiner ist, als die übrigen beyden zusammengenommen, einen Triangel zu beschreiben.

Auflösung.

Es mögen (Fig. 27. Tab. 2.) AG, PQ und NM die drey gegebenen Linien seyn, und

$$AG < PQ + NM$$
$$PQ < AG + NM$$
$$NM < PQ + AG$$

woraus man die Möglichkeit eines Triangels einsieht (§. 32.).

Man erwähle eine davon, z. E. AG, zur Grundlinie, und mache BG = AG. Aus den Endpuncten der Linie BG beschreibe man mit den andern beyden gegebenen Linien PQ und NM Cirkel oder nur Cirkelbogen, die einander durchschneiden werden, weil diese beyden Linien zusammengenommen grösser sind als BG. Aus dem Durchschnittspuncte C ziehe man gerade Linien gegen die Puncte B und G, so ist der verlangte Triangel fertig.

§. 46.

Aufgabe. An einen gegebenen Punct einer geraden Linie einen Winkel zu setzen, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

Auflösung.

Es sey (Fig. 34. Tab. 3.) C der gegebene Punct, an welchen ein Winkel gesetzt werden soll, der dem gegebenen Winkel A gleich ist. Man erwähle sich auf den Schenkeln des Winkels A zwey beliebige Puncte, z. E. N und G, stelle sich zwischen N und G eine gerade Linie vor, wodurch der Triangel

gel ANG entsteht; aus den drey Seiten dieses Triangels beschreibe man über die gegebene Linie einen Triangel (§. 45.), so daß CD = AG, CB = AN, und BD = NG, so muß der Winkel C so groß seyn, als der gegebene Winkel A.

Beweis.

Weil vermöge der Construction alle drey Seiten in dem Triangel CBD eben die Größe haben, wie die drey Seiten in dem Triangel ANG, so müssen auch in beyden die Winkel gleich seyn, die einerley Seiten gegenüber stehen, und folglich C = A (§. 41.).

§. 47.

Aufgabe. Aus einem gegebenen Puncte auf einer geraden Linie eine senkrechte Linie zu ziehen.

Auflösung.

Es sey (Fig. 38. Tab. 3.) in der geraden Linie BQ der Punct A gegeben, auf welchen die senkrechte Linie kommen soll. Man schneide durch Hülfe des Zirkels von der gegebenen Linie auf beyden Seiten des Puncts zwey gleiche Stücke ab, und mache also AB = AQ. Ueber die Linie BQ, die aus diesen beyden gleichen Stücken besteht, beschreibe man einen gleichschenklichten Triangel (§. 44.). Aus der Spitze desselben, nämlich aus dem Puncte C, ziehe man gegen den gegebenen Punct eine gerade Linie, so muß diese Linie CA senkrecht auf der gegebenen Linie stehen.

Beweis.

AB = AQ
BC = QC) vermöge der Construction.
CA = CA (§. 9. Arithm.)

∠BAC = ∠QAC (§. 41.)

Sind also diese Nebenwinkel BAC und QAC gleich, so steht CA nothwendig auf BQ senkrecht (§. 13.).

§. 48.

Aufgabe. Von einem gegebenen Puncte, der sich ausserhalb einer gegebenen Linie befindet, eine senkrechte Linie darauf zu ziehen.

Auflösung.

Es sey (Fig. 37. Tab 3.) der Punct B und die Linie CF gegeben. Man beschreibe aus diesem Puncte B einen Bogen, der die gegebene Lenie in zwey Puncten, z. E. in C und F durchschneidet. Unter dieser Sehne CF, oder wenn dieses nicht angienge, über dieselbe, beschreibe man einen gleichschenklichten Triangel (§. 44.). Die Spitze desselben N verbinde man mit dem gegebenen Puncte B durch eine gerade Linie, so muß dieselbe und folglich auch der Theil BG, den man in der Ausübung nur zu ziehen braucht, senkrecht auf der gegebenen Linie stehen.

Beweis.

Man ziehe noch die Linien BC und BF, so ist

BC = BF (§. 29)
CN = FN vermöge der Construction.
BN = BN (§. 9. Arithm.)

< CBN = < FBN (§. 41.)
BC = BF (§. 29.)
BG = BG (§. 9. Arithm.)

< o = < u (§. 37.)

und also BG senkrecht auf CF. (§. 13.)

Man wird vielleicht auch ohne meine Erinnerung schon einsehen, daß man in der Ausübung nicht nöthig habe, die ganzen Triangel CBN und BNF zu beschreiben, welche man sich blos des Beweises wegen gedenken muß. Man darf nur die Spitzen dieser Triangel B und N durch die Durchschnitte zweyer mit einerley Halbmesser beschriebenen Bogen bestimmen.

§. 49.

Aufgabe. Eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Es sey (Fig. 42. Tab. 3.) die gegebene Linie BQ. Man beschreibe über und unter dieselbe gleichschenklichte Triangel (§. 44.). Die Spitzen dieser Triangel N und G verbinde man mit einander durch eine gerade Linie, so muß diese Linie NG in dem Durchschnittspuncte C die gegebene Linie BQ in zwey gleiche Stücke theilen; d. i. BC muß so groß seyn, als CQ.

Beweis.

NB = NQ
BG = QG
NG = NG vermöge der Construction. (§. 9. Arithm.)

---

x = y (§. 41.)
NB = NQ
NC = NC

BC = CQ (§. 37.)

§. 50.

Aufgabe. Einen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Es sey CAR (Fig. 39. Tab. 3.) der gegebene Winkel. Man schneide auf den Schenkeln desselben zwey willkührliche Stücke von gleicher Länge ab, und mache also AC = AR. Aus den Endpuncten dieser gleichen Stücken C und R beschreibe man mit einerley Halbmesser Bogen, die einander durchschneiden. Aus dem Durchschnittspuncte dieser Bogen B ziehe man eine gerade Linie gegen die Spitze des Winkels A, so muß diese Linie BA den ganzen Winkel CAR in zwey gleiche Theile zergliedern; d. i. o muß so groß seyn, als u.

Beweis.

Man ziehe die Linien CB und BR, so ist

CB = RB (§. 29.)
AC = AR vermöge der Construction.
AB = AB (§. 9. Arithm.)

---

o = u (§. 41.)

§. 51.

§. 51.

Lehrsatz. Durch den Diameter wird die Peripherie und der ganze Cirkel in zwey gleiche Theile getheilt.

Beweis.

Es sey (Fig. 21. Tab. 2.) BD der Diameter des Cirkels BADG. Man stelle sich vor, daß der obere Theil BAD um den Diameter BD herum gedrehet, und auf den untern Theil BGD gelegt werde, so müssen nicht nur die Endpuncte der beyden Bogen BAD und BGD, sondern auch alle mittlern Puncte, und folglich die ganzen Bogen auf einander fallen, weil alle Puncte des Bogens BAD eben den Abstand von dem Mittelpuncte C haben, als die Puncte des Bogens BGD. Da nun also diese beyden Bogen, und überhaupt diese beyden Theile des Cirkels, welche durch den Diameter entstehen, einander decken, und folglich einander gleich sind, (§. 33.) so ist klar, daß sowohl die Peripherie, als auch der Cirkel selbst durch den Diameter in zwey gleiche Theile getheilt wird.

§. 52.

Jeder Cirkelbogen also, der über eine gerade Linie beschrieben wird, ist die Hälfte von der ganzen Peripherie, wenn sein Mittelpunct und seine Endpuncte sich in dieser Linie befinden.

§. 53.

Man errichte (Fig. 21.) aus dem Mittelpuncte des Cirkels über und unter den Diameter die senk-

rechten Linien CA und CG (§. 47.) so werden nicht nur o und u, sondern auch x und y gleiche und rechte Winkel seyn (§. 13.). Der Bogen BA, als das Maaß von dem Winkel o (§. 21.) muß daher eben so groß seyn, als der Bogen AD, welcher das Maaß von dem Winkel u ist (§. 36.) und folglich die Hälfte von dem Bogen BAD, d. i. von der halben Peripherie, (§. 50.) oder welches einerley ist, der vierte Theil von der ganzen Peripherie. Da nun die ganze Peripherie in 360 Grade eingetheilt wird, (§. 21.) und der vierte Theil davon 90 ist; so erhellt hieraus, daß ein rechter Winkel zu seinem Maasse einen Bogen von 90 Graden hat.

§. 54.

Man beschreibe aus dem Mittelpuncte des vorigen Cirkels noch einen andern, z. E. den kleinern Cirkel badg, so wird der Bogen bad die Hälfte, und der Bogen ba ein Viertel von der Peripherie badg seyn. Da man nun die Peripherie eines jeden Cirkels, er sey groß oder klein, in 360 Grade eintheilt, so ist klar, daß auf den Bogen ba oder ad ebenfalls 90 Grade gehen müssen. Hätte man nicht vier, sondern sechs gleiche Winkel und den Punct C, so würde der kleine Cirkel in sechs, und der größere in eben so viel gleiche Theile durch die Schenkel dieser Winkel getheilt, und daher ein jeder dieser Bogen von beyden Cirkeln der sechste Theil seiner Peripherie seyn. Es gilt also gleichviel, ob man mit einem kleinern oder grössern Radio aus der Spitze eines Winkels innerhalb seiner Schenkel den Bogen beschreibt, der ihn messen soll; weil alle solche Bogen gegen ihre Peripherie einerley Verhältniß haben.

§. 55.

§. 55.

Lehrsatz. Die Nebenwinkel über einer geraden Linie betragen zusammen 180 Grade, oder zwey rechte Winkel.

Sind also (Fig. 22. Tab. 2.) o und e Nebenwinkel, so ist $o + e = 180°$.

Beweis.

Man beschreibe aus der gemeinschaftlichen Spitze dieser Winkel die Bogen CQ und QD, welche das Maaß dieser Winkel vorstellen (§. 21.). Nun machen aber die beyden Bogen CQ und QD eine halbe Peripherie aus; (§. 52.) folglich ist klar, daß die beyden, mit den Buchstaben o und e bezeichneten Winkel, $\frac{360}{2}$ d. i. 180 Grad, oder zwey rechte Winkel betragen müssen (§. 53.).

§. 56.

Wären drey oder mehr Winkel über einer geraden Linien, an einer gemeinschaftlichen Spitze, so würde die Summe aller auch nicht mehr als 180 Grad ausmachen. Denn das Maaß der drey Winkel x, o und u (Fig. 23.) ist nicht mehr, als ein halber Cirkel (§. 52.).

§. 57.

Lehrsatz. Alle Winkel, die sich auf einer ebenen Fläche um einen gemeinschaftlichen Punct befinden, betragen in der Summe 360 Grad, oder so viel, als vier rechte Winkel.

Beweis.

Wenn man aus dem Puncte, um welchen sich diese Winkel, wie o, e, u und y, (Fig. 25.) befinden, mit einerley Halbmesser Cirkelbogen beschreibt, die ihr Maaß vorstellen, so machen alle diese Bogen zusammengenommen eine ganze Peripherie aus; daher die Summe dieser Winkel nothwendig 360 Grad (§. 21.) oder vier rechte Winkel betragen muß (§. 53.).

§. 58.

Lehrsatz. *Wenn eine gerade Linie von einer andern durchschnitten wird, so sind die entgegengesetzten Winkel, welche man Verticalwinkel nennt, einander gleich.*

Es werde (Fig. 31. Tab. 2.) die gerade Linie AM von der geraden Linie QR durchschnitten, so ist

o = u
x = e

Beweis.

$$\left.\begin{array}{rcl} o + e & = & 180^\circ \\ u + e & = & 180^\circ \end{array}\right) \text{(§. 55.)}$$

$$\begin{array}{rcll} o + e & = & u + e & \text{(§. 11. Arithm.)} \\ e & = & e & \text{(§. 9. Arithm.)} \\ \hline o & = & u & \text{(§. 14. Arithm.)} \end{array}$$

Ferner:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + u & = & 180^\circ \\ e + u & = & 180^\circ \end{array}\right) \text{(§. 55.)}$$

$$\begin{array}{rcll} x + u & = & e + u & \text{(§. 11. Arithm.)} \\ u & = & u & \\ \hline x & = & e & \text{(§. 14. Arithm.)} \end{array}$$

§. 59.

Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden, und die beyden innern Winkel, die nach einerley Gegend zu liegen, 180 Grad, oder zwey rechte Winkel ausmachen, so müssen die beyden geraden Linien parallel seyn.

Es werde (Fig. 31. Tab. 2.) die Linie AM und BN von der dritten QR durchschnitten, und es sey

$$x + y = 180^\circ$$

so muß AM parallel mit BN seyn.

Beweis.

Wenn die Summe der beyden Winkel $x + y$ 180 Grad beträgt, so muß auch die Summe der Winkel $u + i$, 180 Grade ausmachen. Denn

$$\left.\begin{aligned} x + u &= 180^\circ \\ y + i &= 180^\circ \end{aligned}\right\} \text{(§. 55.)}$$

$x + y + u + i = 180^\circ + 180^\circ$ (§. 13. Arithm.)
$x + y = 180^\circ$ vermöge der angenommenen Bedingung.

$u + i = 180^\circ$ (§. 14. Arithm.)

Sollten nun die beyden Linien nicht parallel seyn, so müßten sie, wenn man sie auf beyden Seiten verlängerte, irgendwo zusammen kommen (§. 10.). Wollte man nun behaupten, daß sie auf der einen Seite, z. E. wo die Puncte A und B sich befinden, einander verlängert durchschneiden müßten, weil $x + y = 180^\circ$,

so

so müßte dieses auch auf der andern Seite aus eben der Ursache geschehen, weil auch u + i, wie jetzt gezeigt worden ist, 180 Grad beträgt. Da aber zwey gerade Linien nicht in mehr als einem Puncte einander berühren oder durchschneiden können (§. 31.), so ist klar, daß die beyden Linien AM und BN, weil ihr Zusammenstossen unmöglich ist, parallel seyn müssen.

§. 60.

Wenn man x + y vermindern, und kleiner als 180 Grad machen wollte, so müßte man entweder den Punct A der Linie BN, oder den Punct B der Linie AM, oder alle beyde Linien einander näher bringen. Würde nun x + y kleiner als 180°, so müßte u + i grösser werden, als 180°, und näherten sich die Linien also in der Gegend AB, so müßten sie sich auf der andern Seite von einander entfernen. Hieraus ist also folgender Satz klar.

Wenn zwey gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden, und die innern Winkel, die nach einer Gegend zu liegen, zusammen mehr oder weniger, als zwey rechte Winkel betragen; so können diese beyden Linien nicht parallel seyn, sondern müssen sich auf derjenigen Seite, wo die Summe dieser beyden Winkel kleiner ist, als 180 Grad, einander nähern, und auf der andern Seite, wo die Summe derselben mehr als 180 Grad beträgt, von einander entfernen.

Z. E. ist (Fig. 32.) $n + m < 180°$, so werden die Linien EF und CD in der Gegend E, C convergent, und wenn $s + r > 180°$ ist, in der Gegend F, D divergent seyn.

§. 61.

Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden, und die beyden innern Winkel, die nach entgegengesetzten Richtungen liegen, und Wechselswinkel heissen, einander gleich sind; so müssen die beyden Linien parallel seyn.

Wenn (Fig. 31.) $y = u$
oder $x = i$

so ist AM parallel mit BN.

Beweis.

$y = u$ vermöge der angenommenen Bedingung.
$x = x$ (§. 9. Arithm.)

$y + x = u + x$ (§. 13. Arithm.)
$u + x = 180°$ (§. 55.)

$y + x = 180°$ (§. 11. Arithm.)

Ist nun $y + x = 180°$, so ist AM mit BN parallel (§. 59.).

§. 62.

Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden, und die innern Winkel so groß sind, als die äussern entgegenstehenden Winkel, die nach ei-

einerley Richtung liegen, so müssen die Linien ebenfalls parallel seyn.

Nämlich wenn (Fig. 31.) $y = o$
oder $i = c$

so ist AM parallel mit BN.

Beweis.

$y = o$ vermöge der Bedingung des Satzes.
$o = u$ (§. 58.)

$y = u$ (§. 11. Arithm.)

Da nun y und u Wechselswinkel sind, so ist AM mit BN parallel (§. 61.).

§. 63.

Wenn also zwey Linien auf einer dritten perpendicular stehen, so sind sie unter sich parallel.

Denn sind (Fig. 33. Tab. 2.) AB und CD senkrechte Linien; so muß sowohl o als auch u ein rechter Winkel seyn (§. 13.); folglich $o + u$ zwey rechte Winkel oder 180° betragen, und daher AB und CD parallel seyn (§. 59).

§. 64.

Lehrsatz. **Wenn zwey Parallellinien von einer dritten durchschnitten werden, so müssen die innern Winkel, die nach einer Gegend zu liegen, zusammengenommen 180 Grad oder zwey rechte Winkel ausmachen.**

Es sey (Fig. 31.) AM parallel mit BN; so soll erwiesen werden, daß $x + y = 180°$.

Be-

Beweis.

Wenn die Summe der beyden Winkel nicht 180 Grad betrüge, so müßte sie entweder grösser oder kleiner seyn. Wäre sie kleiner als 180 Grad, so müßte u + i grösser seyn als 180°, weil diese vier Winkel als zwey Paar Nebenwinkel zweymal 180 Grad ausmachen (§. 55.). Folglich würden sich die beyden Linien AM und BN auf der Seite, wo die Winkel x und y liegen, einander nähern, und auf der Seite, wo sich u und i befinden, von einander entfernen (§. 60.). Wäre aber x + y grösser als 180 Grad, so würden sie sich aus eben der Ursache in der Gegend der Winkel x + y von einander entfernen, und auf der andern Seite zusammenkommen. Da sie aber parallel seyn sollen, vermöge der angenommenen Bedingung, und folglich auf keiner Seite zusammenkommen können; (§. 10.) so ist klar, daß x + y oder u + i weder kleiner noch grösser als 180 Grad seyn kann. Ist aber die Summe der Winkel x und y weder kleiner noch grösser, so ist sie nothwendig eben so groß als 180 Grad.

§. 65.

Wenn also zwey Parallellinien von einer dritten durchschnitten werden, wie AM und BN von QR (*Fig.* 31.) so müssen auch die Wechselswinkel *y* und *u*, einander gleich, und der innere Winkel *y* eben so groß seyn, als der äussere entgegenstehende Winkel *o*. Denn

$$x + y = 180 \quad (\S.\ 64.)$$
$$x + u = 180^{\circ} \quad (\S.\ 55.)$$

$$x + y = x + u$$
$$x = x \quad \text{subtr.}$$

$$y = u \quad (\S.\ 14.\ \text{Arithm.})$$
$$u = o \quad (\S.\ 58.)$$

$$y = o \quad (\S.\ 11.\ \text{Arithm.})$$

§. 66.

Wenn in einem Parallelogram ein rechter Winkel gefunden wird, so kann man daraus schliessen, daß auch die übrigen Winkel rechte Winkel seyn müssen.

Denn ist (Fig. 15. Tab. 1.) N ein rechter Winkel, so muß, weil die Linien DS und NB, als gegenüberstehende Seiten eines Parallelograms, einander parallel sind, auch der Winkel D ein rechter Winkel seyn; sonst könnten sie beyde zusammen nicht zwey rechte Winkel ausmachen (§. 64.). Ist nun D ein rechter Winkel, so muß aus eben dem Grunde auch S ein rechter Winkel, und ist es S, auch B, und also alle drey rechte Winkel seyn.

§. 67.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct eine Linie parallel mit einer gegebenen Linie zu ziehen.

Auflösung.

Es sey N (Fig. 48. Tab. 3.) der gegebene Punct, durch welchen eine Linie mit QS parallel gezogen werden soll. Man ziehe aus dem Puncte N eine gerade

Li-

Linie, z. E. NS, unter einem beliebigen Winkel auf die gegebene Linie QS. Diesen Winkel m trage man an den gegebenen Punct N über die Linie NS, nach einer entgegengesetzten Richtung, daß nämlich n = m (§. 46.) wird. Der Schenkel desselben NP, den man auf beyden Seiten nach Belieben verlängern kann, muß mit der gegebenen Linie QS parallel seyn.

Beweis.

Weil n und m vermöge der Construction nach entgegengesetzten Richtungen stehen, und einander gleich gemacht worden sind, so werden die Linien NP und QS von der dritten NS dergestalt durchschnitten, daß die Wechselswinkel n und m gleich sind; folglich ist NP mit QS parallel (§. 61.).

§. 68.

Lehrsatz. Die Summe aller drey Winkel in einem geradelinichten Triangel beträgt so viel, als zwey rechte Winkel, oder 180 Grad.

Es sey (Fig. 35. Tab. 3.) △ BCF ein geradelinichter Triangel, so ist $< B + < F + < BCF = 180°$.

Beweis.

Man ziehe durch eine Spitze dieses Triangels, z. E. durch den Punct C eine Linie parallel mit der gegenüberstehenden Seite BF (§. 67.) so ist

$< ACB = < B$ (§. 65.)
$< BCF = < BCF$ (§. 9. Arithm.)
$< DCF = < F$ (§. 65.)

$< ACB + < BCF + < DCF = < B + < BCF + < F$ (§. 13. Arithm.)

$< ACB + < BCF + < DCF = 180°$ (§. 56.)

$< B + < BCF + < F = 180°$ (§. 11. Arithm.)

§. 69.

Es können also in einem geradelinichten Triangel zwey rechte oder zwey stumpfe, oder ein rechter und ein stumpfer Winkel zugleich unmöglich statt finden.

§. 70.

Weiß man zwey Winkel in einem geradelinichten Triangel, so kann man den dritten finden, wenn man die Summe derselben von 180 Grad abzieht. Weiß man aber nur einen, so erhält man die Summe der übrigen beyden, wenn man ihn von 180 Grad subtrahirt.

§. 71.

Wenn also in zwey Triangeln zwey Winkel von einer Grösse sind, so muß auch der dritte Winkel in dem einen Triangel dem dritten Winkel in dem andern Triangel gleich seyn.

§. 72.

Zwey Triangel müssen daher auch einander gleich seyn, wenn eine Seite in dem einen Triangel nebst einem anliegenden und gegenüberstehenden Winkel so groß ist, als eine Seite nebst dem anliegenden und gegenüberstehenden Winkel in dem andern Triangel; weil in diesem Falle auch der dritte Winkel dem dritten gleich ist (§. 39.).

§. 73.

Lehrsatz. Wird in einem geradelinichten Triangel eine Seite verlängert, so ist der äus-

äußere Winkel der durch diese Verlängerung entsteht, so groß, als die beyden innern Winkel des Triangels, die ihm gegenüberstehen, zusammen genommen.

Es werde (Fig. 36. Tab. 3.) in dem Triangel MNA die Seite MA verlängert, so ist

$$< NAG = < M + < N$$

Beweis.

$< M + < N + < MAN = 180°$ (§. 68.)
$< NAG + < MAN = 180°$ (§. 55.)

$< M + < N + < MAN = < NAG + MAN$ (§. 11)
$< MAN = < MAN$ (§. 9. Arithm.)

$< M + < N = < NAG$ (§. 14. Arithm.)

Folglich ist auch klar, daß der äußere, durch die Verlängerung der Seite eines Triangels entstehende Winkel allemal größer seyn muß, als ein einzelner von den beyden gegenüberstehenden innern Winkeln des Triangels.

§. 74.

Lehrsatz. In einem gleichschenklichten Triangel sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberstehen, einander gleich.

Es sey (Fig. 41. Tab. 3.) in dem Triangel ACD

AC = AD

---

so ist C = D

Beweis.

Man theile den Winkel CAD, welchen die beyden gleichen Schenkel einschliessen, durch die Linie

AB in zwey gleiche Theile (§. 50.), so ist vermöge der Construction

n = m

AC = AD vermöge der angenommenen Bedingung.

AB = AB (§. 9. Arithm.)

C = D (§. 37.)

§. 75.

Weil nun ein gleichseitiger Triangel auch zugleich ein gleichschenklichter Triangel ist; so müssen darinnen alle Winkel einander gleich seyn, und folglich jeder davon 60 Grad oder $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels ausmachen (§. 68.).

Denn es sey (Fig. 43.) NCM ein gleichseitiger Triangel, so ist, weil CN = CM

und weil auch NC = NM, $\begin{matrix} N = M \\ C = M \end{matrix}$) (§. 74.)

N = C (§. 11. Arithm.)

Nun ist N + C + M = 180° (§. 68.)

d. i. N + N + N = 180° (§. 9. Arithm.)

oder 3 N = 180°

$\frac{3\,N}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ (§. 18. Arithm.)

$\frac{3\,N}{3} = N$ (§. 19. Arithm.)

N = 60° (§. 11. Arithm.)

und folglich auch M und C 60 Grad.

§. 76.

§. 76.

Lehrsatz. Sind in einem geradelinichten Triangel zwey Winkel von einer Grösse, so müssen auch die beyden gegenüberstehenden Seiten gleich seyn.

Es sey (Fig. 41.) in dem Triangel CAD

$$\frac{C = D}{\text{so ist } AC = AD}$$

Beweis.

Man ziehe aus der Spitze des Triangels die senkrechte Linie AB (§. 47.) so ist

$$\frac{\begin{array}{l} e = o \text{ (§. 13.)} \\ C = D \text{ vermöge der angenommenen Bedingung} \\ AB = AB \text{ (§. 9. Arithm.)} \end{array}}{AC = AD \text{ (§. 72.)}}$$

§. 77.

Sind also alle drey Winkel in einem geradelinichten Triangel einander gleich, und folglich jeder 60 Grad oder $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels, so ist der Triangel gleichseitig.

§. 78.

Lehrsatz. Wenn in einem Cirkel, oder in gleichen Cirkeln, ein Bogen einem andern Bogen gleich ist, so müssen auch die Sehnen, welche zu diesem Bogen gehören, einerley Grösse haben.

Es sey z. E. in dem Cirkel (Fig. 44. Tab. 3.) der Bogen DE so groß, als der Bogen EF

so ist auch die Sehne DE der Sehne EF gleich.

Beweis.

Man verbinde die Endpuncte der Bogen durch die geraden Linien CD, CE und CF mit dem Mittelpuncte des Cirkels C, so werden die beyden Triangel CDE und CEF entstehen. Der Bogen DE wird das Maaß von dem Winkel e, und der Bogen EF das Maaß von dem Winkel n seyn (§. 21.). Vermöge der angenommenen Bedingung aber sind die beyden Bogen einander gleich, folglich auch

e = n (§. 36.)
DC = CF (§. 29.)
CE = CE (§. 9. Arithm.)

DE = EF (§. 37.)

Der Beweis würde eben derselbe seyn, wenn nicht von einerley Cirkel, sondern von zwey gleichen Cirkeln die Rede wäre, weil auch die Halbmesser in gleichen Cirkeln einander gleich seyn müssen (§. 29.).

§. 79.

Lehrsatz. Wenn in einem Cirkel, oder in gleichen Cirkeln eine Sehne einer andern Sehne gleich ist; so sind auch die Bogen, welche zu diesen Sehnen gehören, von einer Grösse.

Es sey in dem vorigen Cirkel (Fig. 44. Tab. 3.) die Sehne DE gleich der Sehne EF

---

so muß der Bogen DE dem Bogen EF gleich seyn.

Beweis.

Man ziehe die Halbmesser CD, CE und CF, so ist in den beyden Triangeln DCE und CEF,

DE = EF vermöge der angenommenen Bedingung;
DC = CF (§. 29.)
CE = CE

---

e = n (§. 41.)

Nun ist der Bogen DE das Maaß von dem Winkel e, und der Bogen EF das Maaß von dem Winkel n. Da also die Winkel gleich sind; so muß auch ihr Maaß gleich, und folglich der Bogen DE so groß wie der Bogen EF seyn (§. 36.).

§. 80.

Sollte man also an einen gegebenen Punct einer geraden Linie, z. E. an den Punct N der Linie ND (Fig. 20. Tab. 2.), den gegebenen Winkel A (Fig. 19.) setzen; so könnte man dieses, ausser der oben (§. 46.) angeführten Methode, auch folgendergestalt thun. Man beschreibe aus der Spitze des gegebenen Winkels mit einem willkührlichen Halbmesser den Bogen BC; mit eben dem Halbmesser beschreibe man auch aus dem gegebenen Puncte der geraden Linie einen Bogen von unbestimmter Grösse. Nun fasse man die Endpuncte des Bogens BC, wodurch die gerade Linie zwischen diesen beyden Puncten, oder die Sehne des Bogens BC bestimmt wird, in den Cir-

kel, und trage diese Sehne aus dem Puncte D in den beschriebenen Bogen. Den Endpunct C verbinde man mit dem gegebenen Puncte N durch eine gerade Linie, so muß der Winkel N so groß seyn, als der Winkel A; weil die Bogen, welche das Maaß dieser Winkel sind, einerley Halbmesser und gleiche Sehnen haben.

§. 81.

Man beschreibt daher aus zwey gegebenen Winkeln und einer Linie, z. E. aus den beyden Winkeln P und A, nebst der geraden Linie CN (Fig. 29. Tab. 2.), am geschwindesten einen Triangel, wenn man nach der jetzt angeführten Methode die beyden gegebenen Winkel P und A an die Endpuncte der Linie CN setzet, und ihre Schenkel so lange verlängert, bis sie einander durchschneiden. Die beyden gegebenen Winkel aber müssen in der Summe weniger als 180 Grad betragen, wenn ein Triangel möglich seyn soll (§. 68.).

§. 82.

Lehrsatz. Ein jeder Winkel, der sich an dem Mittelpuncte eines Cirkels befindet, ist zweymal so groß, als ein Winkel an der Peripherie, wenn die Schenkel beyder Winkel auf einerley Cirkelbogen stehen.

Es giebt hier eigentlich drey Fälle, in welchen ein Winkel an dem Mittelpuncte, und ein Winkel an der Peripherie auf einerley Cirkelbogen stehen kann. Denn der Mittelpunct des Cirkels liegt entweder in einem Schenkel des Winkels an der Peripherie, oder zwischen dessen Schenkeln, oder auſſer den-

denselben; und daher muß auch ein dreyfacher Beweis geführet werden, wenn die Allgemeinheit dieses Satzes gezeigt werden soll.

Erster Fall.

Es sey (Fig. 50. Tab. 4.) o ein Winkel am Mittelpuncte, B ein Winkel an der Peripherie, der mit jenem auf einerley Bogen AF stehet, und das Centrum des Cirkels C befinde sich in dem Schenkel AB des Winkels an der Peripherie; so ist

$$o = 2B$$

Beweis.

$CB = CF$ (§. 29.)

$B = F$ (§. 74.)
$B = B$ (§. 9. Arithm.)

$2B = B + F$ (§. 13. Arithm.)
$o = B + F$ (§. 73.)

$o = 2B$ (§. 11. Arithm.)

Zweyter Fall.

Es sey (Fig. 51.) PCQ ein Winkel am Mittelpuncte, PNQ ein Winkel an der Peripherie, beyder Schenkel stehe auf dem Bogen PQ, und der Mittelpunct des Cirkels C falle zwischen die Schenkel des Winkels an der Peripherie; so läßt sich auch in diesem Falle erweisen, daß

$$PCQ = 2\,PNQ$$

Beweis.

Man ziehe aus der Spitze des Winkels an der Peripherie durch den Mittelpunct die gerade Linie NG, so ist, vermöge des vorigen Beweises,

$$x = 2c$$
$$y = 2o$$

$$x + y = 2c + 2o \quad (\S.\ 13.\ \text{Arithm.})$$
$$x + y = PCQ \quad (\S.\ 10.\ \text{Arithm.})$$

$$PCQ = 2c + 2o \quad (\S.\ 11.\ \text{Arithm.})$$
$$2c + 2o = 2(c + o) \quad (\S.\ 9.\ \text{Arithm.})$$

$$PCQ = 2(c + o) \quad (\S.\ 11.\ \text{Arithm.})$$
$$2(c + o) = 2\,PNQ \quad (\S.\ 10.\ \text{Arithm.})$$

$$PCQ = 2\,PNQ \quad (\S.\ 11.\ \text{Arithm.})$$

Dritter Fall.

Es sey (Fig. 52.) auf einerley Bogen DM ein Winkel an dem Mittelpuncte DCM, und ein Winkel an der Peripherie DAM, und das Centrum des Cirkels C befinde sich ausser den Schenkeln des Winkels an der Peripherie, so ist gleichfalls

$$DCM = 2\,DAM$$

Beweis.

Man ziehe wieder aus der Spitze des Winkels an der Peripherie durch den Mittelpunct des Cirkels die Linie AR, so ist, vermöge des ersten Beweises,

RCM

RCM = 2 RAM
2 RAM = 2 RAD + 2 DAM (§. 10. Arithm.)

RCM = 2 RAD + 2 DAM (§. 11. Arithm.)
RCM = RCD + DCM (§. 10. Arithm.)

RCD + DCM = 2 RAD + 2 DAM (§. 11. Ar.)
RCD = 2 RAD vermöge des ersten Beweises.

DCM = 2 DAM (§. 14. Arithm.)

Da nun nicht mehr als diese drey Fälle möglich sind; so ist klar, daß ein Winkel am Mittelpuncte überhaupt noch einmal so groß ist, als ein Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf einerley Bogen steht.

§. 83.

Weil ein Winkel am Mittelpuncte den ganzen Bogen, worauf er steht, zu seinem Maaß hat, (§. 21.) so kann ein Winkel an der Peripherie nur die Hälfte des Bogens, auf welchem seine Schenkel stehen, zu seinem Maaß haben. Stünde daher ein Winkel an der Peripherie auf einem Bogen von 80 Graden, so würde es ein Winkel von 40 Graden; stünde er auf einem Bogen von 100 Graden, so würde es ein Winkel von 50 Graden, u. s. f. seyn.

§. 84.

Es sind also alle Peripherie-Winkel, wie z. E. R, (Fig. 53. Tab. 4.) deren Schenkel auf den Endpuncten eines Diameters, d. i. auf einer halben Peripherie stehen, rechte Winkel oder Winkel von 90 Graden, und folglich diejenigen, die auf einem gröss fern Bogen stehen, als die halbe Peripherie ist, wie der Winkel A, (Fig. 54.) stumpfe Winkel; diejeni-

gen aber, die auf einem kleinern Bogen stehen, als die halbe Peripherie ist, wie der Winkel B, (Fig. 54.) spitzige Winkel.

§. 85.

Es müssen ferner alle Peripherie-Winkel einander gleich seyn, welche, wie B und R, (Fig. 54.) auf einerley oder auf gleichen Bogen eines Cirkels stehen.

§. 86.

Sind endlich Peripherie-Winkel, die auf verschiedene Bogen stehen, einander gleich, so müssen auch diese Bogen einerley Grösse haben. Denn ist (Fig. 45. Tab. 3.) der Winkel QNB so groß, als der Winkel BNR, so muß auch das Maaß des erstern, d. i. $\frac{1}{2}$ QB so groß seyn, als das Maaß des andern, d. i $\frac{1}{2}$ BR, und folglich auch QB = BR. (§. 17. Arithm.)

§. 87.

Aufgabe. An einen gegebenen Endpunct einer geraden Linie eine senkrechte Linie zu ziehen.

Es sey (Fig. 55. Tab. 4.) die gerade Linie BA gegeben, über welche an den Endpunct B eine senkrechte Linie errichtet werden soll.

Auflösung.

Man erwähle sich einen beliebigen Punct auf der gegebenen Linie, z. E. den Punct G, beschreibe über die

die Entfernung desselben von dem gegebenen Endpuncte B, d. i. über die Linie BG einen gleichschenklichten Triangel BCG (§. 44.). Die Seite CG, welche dem gegebenen Endpuncte B gegen über stehet, verlängere man, und mache CF = CG. Aus dem Puncte F ziehe man gegen den Punct B eine gerade Linie, so wird diese Linie FB auf der gegebenen Linie BA senkrecht stehen.

Beweis.

Weil vermöge der Construction CB = CG = CF, so können diese drey gleiche Linien als Halbmesser eines Cirkels angesehen werden. Man beschreibe daher mit der Linie CB einen Cirkel, so wird die Peripherie desselben auch durch die Puncte G und F gehen. Der Winkel FBG, als ein Peripheriewinkel, der über dem Diameter FG stehet, muß also nothwendig ein rechter Winkel seyn (§. 84.), und folglich die Linie FB senkrecht auf der Linie BA stehen. (§. 13.)

§. 88.

Lehrsatz. Eine senkrechte Linie, wodurch eine Sehne in zwey gleiche Theile getheilt wird, theilt auch, wenn man sie verlängert, den dazu gehörigen Bogen in zwey gleiche Theile, und geht durch den Mittelpunct des Cirkels.

Es werde die Sehne QR (Fig. 45. Tab. 3.) durch die senkrechte Linie NB in zwey gleiche Theile QG und GR getheilet, so läßt sich erweisen, daß auch der Bogen QBR dadurch in die zwey gleichen Theile QB und BR getheilet wird, und das NB durch den Mittelpunct des Cirkels gehet.

Beweis.

Man ziehe die Linien NQ und NR, so ist in den beyden Triangeln QNG und GNR

QG = GR
o = u
NG = NG (§. 9. Arithm.)

vermöge der Bedingung des Satzes.

< QNB = < BNR
QN = NR

(§. 37.)

Aus der Gleichheit der Winkel QNB und BNR erhellet die Gleichheit der Bogen QB und BR (§. 86.), und aus der Gleichheit der Sehnen QN und NR die Gleichheit der Bogen, die zu diesen Sehnen gehören (§. 79.). Ist nun also

der Bog. QN = dem Bog. NR
und der Bog. QB = dem Bog. BR

---

so ist QN + QB = NR + BR (§. 13. Arith.)

und folglich geht die Linie NB durch die Mitten des Cirkels, d. i. durch das Centrum desselben.

§. 89.

Sollte man also einen Cirkel-Bogen, z. E. den Bogen DCN (Fig. 40.) in zwey gleiche Theile zergliedern, so dürfte man nur die Sehne dieses Bogens DN durch die senkrechte Linie SQ halbiren, (§. 49.) so würde dieselbe in dem Puncte C auch den Bogen in zwey gleiche Theile theilen.

§. 90

Aufgabe. Durch drey gegebene Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Cirkel zu beschreiben.

Auf-

Auflösung.

Es mögen (Fig. 46. Tab. 3.) C, B und A, die drey gegebenen Puncte seyn, durch welche ein Cirkel beschrieben werden soll. Man stelle sich zwischen dem Puncte C und B, so wie zwischen den Puncten B und A eine gerade Linie vor, und theile beyde Linien CB und BA durch die senkrechten Linien SF und QR in zwey gleiche Theile (§. 49.). Der Punct G, wo die Theilungslinien SF und QR einander durchschneiden, muß der Mittelpunct desjenigen Cirkels seyn, dessen Peripherie durch alle drey gegebene Puncte gehet, und den man nunmehr mit der Linie GC oder GA leicht beschreiben kann.

Beweis.

Weil die Puncte C, B und A in der Peripherie des Cirkels liegen sollen, so müssen die Linien CB und BA Sehnen von dem zu beschreibenden Cirkel seyn. Da nun vermöge der Construction die senkrechten Linien SF und QR die Sehnen CB und BA in zwey gleiche Theile theilen, so muß der Mittelpunct des verlangten Cirkels sowohl in der Linie SF als auch in der Linie QR (§. 88.), und folglich in dem Durchschnittspuncte G liegen; weil dieses der einzige Punct ist, der sich in den beyden geraden Linien zugleich befinden kann (§. 31.).

§. 91.

Aus der vorigen Aufgabe läßt sich zugleich die Art und Weise einsehen, wie man zu einem gegebenen Bogen oder ganzen Cirkel den Mittelpunkt finden kann. Denn man darf nur zwey beliebige Chorden an-

annehmen, und sie durch senkrechte Linien halbiren, so zeigt der Durchschnittspunct der Theilungslinien das verlangte Centrum an.

§. 92.

Lehrsatz. Ein Parallelogram wird durch jede Diagonal-Linie, d. i. durch eine gerade Linie, die man von einem Winkel in den entgegengesetzten Winkel ziehen kann, in zwey gleiche Triangel getheilet.

Es sey (Fig. 48.) QNPS ein Parallelogram, und NS eine Diagonal-Linie; so soll erwiesen werden, daß

$$\triangle QNS = \triangle NPS.$$

Beweis.

Weil QNPS ein Parallelogram ist, vermöge der angenommenen Bedingung, so muß NP mit QS, und NQ mit PS parallel seyn (§. 18.); folglich

$$\left.\begin{array}{rcll} m & = & n & \\ x & = & y & \end{array}\right) \text{ (§. 65.)}$$
$$NS = NS \quad \text{(§. 9. Arithm.)}$$
$$\triangle QNS = \triangle NPS \quad \text{(§. 39.)}$$

§. 93.

Da vermöge des vorigen Beweises die Triangel QNS und NPS einander decken; so folgt hieraus ferner, daß

$$QS = NP$$
$$NQ = PS$$
$$Q = P \quad \text{(§. 39.)}$$

und

und weil auch, wie schon in dem vorigen Beweise angemerkt worden,

$$\begin{array}{rcl} m & = & n \\ y & = & x \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{so ist} & m + y & = & n + x & (\S.\ 13.\ \text{Arithm.}) \\ \text{oder} & \angle QSP & = & \angle QNP & (\S.\ 10.\ \text{Arithm.}) \end{array}$$

das heißt: *in einem jeden Parallelogram sind die gegenüberstehenden Seiten und die gegenüberstehenden Winkel einander gleich.*

§. 94.

Alle senkrechte Linien, die sich zwischen einerley Parallellinien befinden, müssen also einander gleich seyn.

Denn es sey (Fig. 56. Tab. 4.) die Linie AD parallel mit der Linie NR, und sowohl AN als auch MP senkrecht auf NR, so ist klar, daß diese beyden Linien AN und MP unter sich parallel seyn (§. 63.), und mit den Linien AM und NP ein Parallelogram ausmachen müssen (§. 18.). Ist nun AMPN ein Parallelogram, so ist $AN = MP$ (§. 93.).

§. 95.

Lehrsatz. Eine jede vierseitige Figur, in welcher die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, ist ein Parallelogram.

Es sey (Fig. 48. Tab. 3.) in der vierseitigen Figur QNPS

NP = QS
NQ = PS

---

so muß auch NP parallel mit QS,
und NQ parallel mit PS seyn.

Beweis.

Man ziehe die Diagonale NS, so entstehen die Triangel NQS und NPS; in welchen

QS = NP
NQ = PS
NS = NS

) vermöge der angenommenen Bedingung.
(§. 9. Arithm.)

---

m = n
x = y

) (§. 41.)

Aus der Gleichheit der Wechselswinkel m und n folgt, daß NP parallel mit QS,
und aus der Gleichheit der Wechselswinkel x und y, daß NQ parallel mit PS ist (§. 61.).

§. 96.

Da nun in einem Rechteck und in einer Rhomboide die gegenüberstehenden Seiten, in einem Quadrate und Rhombo aber alle Seiten, folglich auch die gegenüberstehenden einander gleich sind (§. 18.); so ist klar, daß alle diese vier Arten von vierseitigen Figuren Parallelogrammen sind.

Aus dem vorigen Lehrsatze erhellt auch zugleich der Grund von der gewöhnlichen mechanischen Construction der Parallel-Linien vermittelst eines sogenannten Parallel-Linials. Denn weil nicht nur die

Bänder, womit die beyden Liniale, aus denen dieses Werkzeug bestehet, gleich lang, sondern auch ihre Endpuncte auf beyden Linialen gleich weit von einander und von den Rändern der Liniale abstehen; so erhält man bey jeder möglichen Lage der beyden Liniale allemal eine vierseitige Figur, deren gegenüberstehende Seiten einander gleich, und folglich parallel sind.

§. 97.

Ein Parallelogram läßt sich also leicht beschreiben, wenn man einen Winkel weiß, und die beyden Seiten, welche diesen Winkel einschliessen. Wären z. E. (Fig. 47. Tab. 3.) die Linien CD und AB nebst dem Winkel N gegeben, so dürfte man nur den Winkel G so groß, als den gegebenen Winkel N, (§. 80.), ferner GB = AB und GD = CD machen, aus dem Puncte D mit der Seite GB, aus dem Puncte B mit der Seite GD Bogen beschreiben, und den Durchschnittspunct L mit den Puncten D und B durch gerade Linien verbinden. Denn die Figur GDLB, welche auf diese Art entsteht, muß nothwendig ein Parallelogram seyn, weil die gegenüberstehenden Seiten einerley Grösse haben (§. 95.). Soll ein rechtwinklichtes Parallelogram beschrieben werden, so braucht man nur zwey anliegende Seiten zu wissen, und sie senkrecht an einander zu setzen, im übrigen aber, wie vorhin, zu verfahren. Denn ist (Fig. 48.) NP vermöge der Construction so groß, als QS, und NQ so groß, als PS gemacht worden; so ist die Figur QNPS ein Parallelogram; (§. 95.) und ist NQ auf QS senkrecht, folglich bey Q ein

rechter Winkel, so müssen auch alle übrige Winkel rechte Winkel seyn (§. 66.). Zu der Construction eines Quadrats braucht man also nichts als eine Linie. Wäre z. E. (Fig. 49. Tab. 3.) die Linie DQ gegeben; so würde man ein Quadrat erhalten, wenn man an einem Endpuncte dieser Linie, z. E. an dem Punct D, eine senkrechte Linie AD errichtete, (§. 87.) dieselbe so groß machte, als DQ, aus den Puncten A und Q mit AD Bogen beschriebe, die einander durchschnitten, und aus dem Durchschnittspuncte B die Linien BA und BQ zöge. Denn weil vermöge der Construction alle Seiten, und also auch die gegenüberstehenden gleich sind, so müssen dieselben nothwendig parallel seyn (§. 95.); und weil AD senkrecht auf QD gesetzt worden, so ist D ein rechter Winkel (§. 13.); folglich sind auch die übrigen drey Winkel rechte Winkel (§. 66.), und daher diese Figur ein Quadrat (§. 18.).

§. 98.

Lehrsatz. Alle Parallelogramme, die sich zwischen einerley Parallellinien, und über einerley oder gleichen Grundlinien befinden, sind einander gleich.

Es sey (Fig. 56. Tab. 4.) die Linie AD parallel mit der Linie NR, und zwischen denselben befinde sich über der gemeinschaftlichen Grundlinie NP sowohl das Parallelogram ANPM, als auch das Parallelogram HNPD; so soll erwiesen werden, daß

ANPM = HNPD.

Beweis.

Weil die beyden Vierecke ANPM und HNPD, vermöge der angenommenen Bedingung, Parallelogramme sind, so ist

$$\left.\begin{array}{rcl} AM & = & NP \\ NP & = & HD \end{array}\right) \text{ (§. 93.)}$$

$$AM = HD \text{ (§. 11. Arithm.)}$$

$$AM + MH = HD + MH \text{ (§. 13. Arithm.)}$$

$$\text{d. i. } \left.\begin{array}{rcl} AH & = & MD \\ AN & = & MP \\ NH & = & PD \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(§. 10. Arithm.)} \\ \text{(§. 93.)} \end{array}$$

$$\triangle AHN = \triangle MDP \text{ (§. 41.)}$$

$$\triangle AHN - \triangle MCH = \triangle MDP - \triangle MCH \text{ (§. 14. Arithm.)}$$

$$\text{d. i. } AMCN = CHDP$$

$$AMCN + \triangle NCP = CHDP + \triangle NCP \text{ (§. 13. Ar.)}$$

$$\text{d. i. } ANPM = HNPD \text{ (§. 10. Arithm.)}$$

§. 99.

Man pflegt in einem Parallelogram die senkrechte Linie, die man von derjenigen Seite, welche der Grundlinie entgegen steht, entweder auf die Grundlinie selbst, oder auf die verlängerte Grundlinie ziehen kann, die Höhe desselben zu nennen. So ist z. E. (Fig. 63. Tab. 5.) die senkrechte Linie DC oder SA die Höhe des Parallelograms NDSB, wofern man NB zur Grundlinie annimmt, welches aber

von der blossen Willkühr oder Bequemlichkeit abhängt, indem man jede Seite als die Grundlinie betrachten kann. Daß es aber gleichviel ist, ob die senkrechte Linie, welche die Höhe vorstellt, auf die Grundlinie selbst, oder auf die verlängerte Grundlinie gezogen wird, und daß z. E. DC = SA, erhellt daraus, weil alle senkrechte Linien, die sich zwischen einerley Parallelen befinden, einander gleich sind (§. 94.) Alle Parallelogrammen zwischen einerley Parallelinien müssen daher nothwendig gleiche Höhen haben, weswegen man den vorigen Satz auch folgendergestalt auszudrücken pflegt: **Alle Parallelogramme sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.**

§. 100.

Auch Triangel, z. E. △ *LSR* **und** △ *LNR* (*Fig.* 57. *Tab.* 4.), **sind einander gleich, wenn sie über einerley Grundlinie, und zwischen einerley Parallellinien stehen.** Denn man ziehe aus dem Punct R die Linie RB parallel mit der Seite LS des ersten Triangels, und die Linie RP parallel mit der Seite LN des andern Triangels; so müssen die dadurch entstehenden Parallelogrammen LSBR und LNPR einander gleich seyn (§. 98.).

Ist aber LSBR = LNPR

---

so ist auch $\frac{1}{2}$ LSBR = $\frac{1}{2}$ LNPR (§. 18. Arithm.)
d. i. △LSR = △LNR (§. 92.)

§. 101.

§. 101.

Die senkrechte Linie, z. E. FB (Fig. 64. Tab. 5.) oder CG (Fig. 65.), von der Spitze eines Triangels auf die Grundlinie, welches eine jede Seite seyn kann, oder auf die verlängerte Grundlinie, wird seine Höhe genannt. Man wird daher leicht einsehen, daß sich der vorige Satz auch also ausdrücken läßt: **Alle Triangel sind einander gleich, die einerley Grundlinie und Höhe haben.**

§. 102.

Weil also (Fig. 57. Tab. 4.)

$\triangle$ LSR $=$ $\triangle$ LNR (§. 100.)

und $\triangle$ LNR $=$ $\frac{1}{2}$ LNPR (§. 92.)

$\triangle$ LSR $=$ $\frac{1}{2}$ LNPR (§. 11 Ar.)

d. h. ein jeder Triangel ist die Hälfte eines Parallelograms, wenn er mit ihm einerley Grundlinie und Höhe hat, oder sich zwischen eben denselben Parallellinien befindet.

§. 103.

Lehrsatz. **Wenn man über die Seiten eines rechtwinklichten Triangels Quadrate beschreibt, so ist das Quadrat derjenigen Seite, welche dem rechten Winkel gegen über stehet, so groß, als die Quadrate der übrigen beyden Seiten zusammen genommen.**

Es sey (Fig. 58. Tab. 4.) der Triangel CAB ein rechtwinklichter Triangel, und CB die Seite, welche dem rechten Winkel gegen über stehet; so ist, wenn

wenn die vierseitigen Figuren, die über die Seiten dieses Triangels beschrieben worden, Quadrate sind,

$$CFNB = AMLB + ACPR$$

Beweis.

Das Quadrat AMLB läßt sich beschreiben, wenn man die Seite AC des rechtwinklichten Triangels verlängert, bis AM = AB wird, hernach durch M die Linie ML parallel mit AB, und durch den Punct B die Linie BL parallel mit AM ziehet. Denn da CAB ein rechter Winkel ist, vermöge der angenommenen Bedingung, so muß auch MAB ein rechter Winkel (§. 55.), ingleichen ABL, BLM und AML rechte Winkel (§. 66.), und daher AMLB ein Quadrat seyn, weil nicht nur, vermöge der Construction, AM = AB, sondern auch die gegen über stehenden Seiten parallel und folglich gleich sind (§. 93.). Eben so ist klar, daß man das Quadrat ACPR beschreiben könne, wenn man AB verlängert, bis AR = AC wird, und alsdenn durch die Puncte R und C mit AC und AR Parallelen zieht, bis an den Punct, wo sie zusammenstossen. Wenn man nun in dem Quadrate, das über die Seite CB beschrieben worden, aus der Spitze des rechten Winkels A. die Linie AG parallel mit den Seiten CF und BN ziehet; so wird dieses Quadrat dadurch in die beyden Parallelogramme QGNB und QGFC zergliedert. Man ziehe nunmehr die Linien CL und AN, so entstehen die beyden Triangel CBL und ANB, die einander gleich seyn müssen, weil CB = BN, als Seiten des Quadrats CFNB, und BL = BA, als Seiten des Quadrats AMLB, und der

Win-

Winkel CBL so groß, als der Winkel ABN ist, indem jeder aus dem Winkel eines Quadrats, d. i. aus einem rechten Winkel und dem Winkel CBA bestehet (§. 37.). Da nun CA und AM eine einzige gerade Linie, vermöge der Construction, ausmachen, und BL parallel mit CM ist; so ist der Triangel CBL die Hälfte von dem Quadrat AMLB, (§. 102.) so wie aus eben dem Grunde, weil AG parallel mit BN gezogen worden, der Triangel ANB die Hälfte von dem Parallelogram QGNB ist (§. 102.). Da nun die Triangel CBL und ANB, d. i. die Hälften der Figuren AMLB und QGNB, einander gleich sind; so müssen auch die ganzen Figuren einander gleich seyn. Zieht man gerade Linien von P nach B und von A nach F; so läßt sich auf eben die Art beweisen, daß das Parallelogram QGFC so groß ist, als das Quadrat ACPR. Da nun das Quadrat CFNB aus den beyden Parallelogrammen QGNB und QGFC bestehet; so ist klar, daß CFNB = AMLB + ACPR.

§. 104.

Pythagoras soll diesen Lehrsatz, oder nach einigen Schriftstellern doch wenigstens den ersten scharfen Beweis zu diesem überaus nützlichen Satze erfunden haben; daher man ihn das pythagorische Theorem zu nennen pflegt. Von einigen wird er auch Magister Matheseos genannt.

§. 105.

Die Seite, welche in einem rechtwinklichten Triangel dem rechten Winkel gegen über steht, heißt

die Hypotenuse, und die übrigen beyden, welche den rechten Winkel einschliessen, die *Catheti*; daher man auch den vorigen Lehrsatz so auszudrücken pflegt: **Das Quadrat der Hypotenuse ist so groß, wie die Quadrate der *Cathetorum* zusammen genommen.** Man pflegt übrigens auch die Quadrate durch die beyden Buchstaben anzuzeigen, die an den Endpuncten ihrer Seiten stehen, zu denen man noch rechter Hand den Buchstaben q setzt. Z. E. der vorige Satz könnte auch also geschrieben werden:

$$CB^q = CA^q + AB^q$$

oder auf eben die Art, wie man in der Arithmetik die Quadratzahlen bezeichnet, nämlich:

$$CB^2 = CA^2 + AB^2$$

§. 106.

Ist also in einem rechtwinklichten Triangel die Hypotenuse und ein Cathetus so groß, als in einem andern rechtwinklichten Triangel; so müssen auch die übrigen Stücke in beyden Triangeln, und die Triangel selbst einander gleich seyn.

Ist z. E. (Fig. 59.) sowohl AQR als auch aqr ein rechtwinklichter Triangel, und

$$AQ = aq$$
$$AR = ar$$

---

so ist auch $RQ = rq$

$$A = a$$
$$Q = q$$
$$\triangle AQR = \triangle aqr$$

Denn

Denn weil $AQ = aq$ und $AR = ar$, vermöge der angenommenen Bedingung; so ist auch

$$AQq = aqq$$
$$\text{und } ARq = arq$$

Da nun nach dem pythagorischen Lehrsatze

$$AQq = ARq + RQq$$
$$AQq = aqq$$

$$ARq + RQq = aqq \quad (\S.\ 11.\ Ar.)$$
$$aqq = arq + rqq \quad (\S.\ 103.)$$

$$ARq + RQq = arq + rqq \quad (\S.\ 11.\ Ar.)$$
$$ARq = arq$$

$$RQq = rqq \quad (\S.\ 14.\ Ar.)$$

$$RQ = rq$$

Sind nun alle drey Seiten in dem einen Triangel so groß als in dem andern, so müssen auch die Winkel, die einerley Seiten gegen über stehen, und die Triangel selbst von einerley Grösse seyn (§. 41.).

§. 107.

Soll ein Quadrat noch einmal so groß, als ein gegebenes Quadrat, z. E. als das Quadrat FMRG (Fig. 60. Tab. 4.) gemacht werden, so darf man nur über die Diagonale MG des gegebenen Quadrats ein Quadrat beschreiben. Denn weil F der

Winkel eines Quadrats, und folglich ein rechter Winkel ist; so ist

$$MC^q = FM^q + FG^q \quad (\S.\ 103.)$$
$$FM^q = FG^q \quad (\S.\ 9.\ Ar.)$$

$$MG^q = FG^q + FG^q = 2\,FG^q$$

§. 108.

Sollte das zu beschreibende Quadrat dreymal so groß werden, als das gegebene; so errichte man an das Ende der Diagonale eine senkrechte Linie NG, mache dieselbe so groß als die Seite des gegebenen Quadrats FG, und ziehe die Hypotenuse MN, über welche sich ein Quadrat beschreiben läßt, welches dreymal so groß ist, als das gegebene Quadrat. Denn

$$MN^q = MC^q + NG^q \quad (\S.\ 103.)$$
$$MG^q = 2FG^q \quad (\S.\ 107.)$$

$$MN^q = 2FG^q + NG^q \quad (\S.\ 9.\ Arithm.)$$
$$FG^q = NG^q \text{ weil } FG = NG \text{ vermöge der Constr.}$$

$$MN^q = 2FG^q + FG^q = 3FG^q \quad (\S.\ 9.\ Ar.)$$

§. 109.

Wird ein Quadrat verlangt, so groß als zwey gegebene Quadrate, z. E. als die Quadrate FMRG und CPFD (Fig. 60.); so beschreibe man einen rechten Winkel A, trage auf die Schenkel desselben die Seiten der beyden gegebenen Quadrate, so daß

$$AG = FG$$
und $$AD = CD$$

und

und ziehe die Hypotenuse DG; so muß dieselbe die Seite eines Quadrats seyn, welches so groß ist, als beyde gegebene Quadrate zusammen genommen. Denn

$DG^q = AD^q + AG^q$ (§. 103.)
$DC^q = AD^q$ und $FG^q = AG^q$ vermöge der Constr.

$DG^q = CD^q + FG^q$ (§. 9. Ar.)

§. 110.

Soll ein Quadrat gemacht werden, das so groß ist, als drey gegebene Quadrate, z. E. als die Quadrate FMRG, CPFD, ALHB (Fig. 60.), so suche man erst auf die vorige Art die Seite eines Quadrats, das so groß ist, als zwey der gegebenen Quadrate. An einem Endpuncte dieser Seite DG z. E. an D errichte man eine senkrechte Linie DB, mache dieselbe so groß, als die Seite des dritten Quadrats AB, und ziehe die Hypotenuse BG; so muß dieselbe die Seite des verlangten Quadrats seyn, das so groß ist, als alle drey Quadrate zusammen genommen. Denn

$BG^q = DG^q + DB^q$ (§. 103.)
$DG^q = FG^q + CD^q$ (§. 109.)

$BG^q = FG^q + CD^q + DB^q$ (§. 9. Ar.)
$AB^q = DB^q$

$BG^q = FG^q + CD^q + AB^q$ (§. 9. Ar.)

Hieraus wird man leicht einsehen, wie man auch ein Quadrat machen könne, das so groß ist, als 4, oder 5, oder 6, oder noch mehr gegebene Quadrate.

§. 111.

Lehrsatz. Eine Linie, welche aus dem Mittelpuncte eines Cirkels senkrecht auf eine Chorde gezogen wird, theilt die Chorde, und wenn man sie verlängert, auch den zu dieser Chorde gehörigen Bogen in zwey gleiche Theile.

Es sey (Fig. 45. Tab. 3.) C der Mittelpunct eines Cirkels und CB senkrecht auf QR, so ist

QG = GR
und QB = BR

Beweis.

Man ziehe die Halbmesser, CQ und CR; so müssen die beyden Triangel CQG und CRG rechtwinklicht seyn, weil CG senkrecht auf QR steht, vermöge der angenommenen Bedingung. Nun ist

CQ = CR (§. 29.)
CG = CG

QG = GR
und ∠QCG = ∠RCG (§. 106.)

QB = BR (§. 36.)

§. 112.

Eine Figur heißt in den Cirkel beschrieben, wenn alle Seiten der Figur Chorden des Cirkels, und daher auch alle Winkel derselben Peripheriewinkel sind. Von dem Cirkel sagt man alsdenn, daß er um die Figur beschrieben sey, in welchem Falle also die Peripherie desselben durch alle Spitzen der Winkel gehen muß.

§. 113.

§. 113.

Wenn sich die Peripherie des Cirkels geometrisch in jede beliebige Anzahl gleicher Theile zergliedern liesse; so würde es nicht schwer seyn, jede verlangte reguläre Figur in den Cirkel geometrisch zu beschreiben. Denn theilt man die Peripherie in so viel gleiche Theile, als die Figur Seiten haben soll, und zieht man alsdenn die Chorden dieser Bogen, so muß nothwendig eine reguläre Figur entstehen; weil die Chorden gleicher Bogen einander gleich (§. 78.), und die Winkel an der Peripherie, die auf gleichen Bogen stehen, auch von einer Grösse sind (§. 85.). Also kann man z. E. ein reguläres Viereck, d. i. ein Quadrat, in einen Cirkel beschreiben, wenn man durch ein Paar Diameter, die einander rechtwinklicht durchschneiden, die Peripherie in vier gleiche Theile zergliedert (§. 53.). Denn ist (Fig. 70. Tab. 5.) der Bogen pa = af = fl = lp, und folglich jeder 90 Grad; so muß die Figur pafl vier gleiche Seiten (§. 78.), und auch vier rechte Winkel haben; weil jeder Winkel auf einer halben Peripherie stehet (§. 84.). Wird nun jeder vierte Theil der Peripherie wieder halbirt, welches geometrisch geschehen kann (§. 50.); so erhält man acht gleiche Theile aus der ganzen Peripherie, und durch die Chorde dieser Bogen die Seiten eines regulären Achtecks; woraus sich ferner begreifen läßt, wie man ein 16 Eck, ein 32 Eck u. s. f. geometrisch in den Cirkel beschreiben könne. Allein in sehr vielen andern Fällen ist eine geometrische Eintheilung der Peripherie in gleiche Theile nicht möglich. Denn so läßt sich dieselbe nicht in 7, oder in 13, oder in 17, u. s. f. gleiche Theile

zer-

zergliedern; daher pflegt man in dergleichen Fällen zu einer mechanischen Construction seine Zuflucht zu nehmen. Nämlich man dividirt 360 Grad durch die Zahl der Seiten, und setzt durch Hülfe des Transporteurs an den Mittelpunct des Cirkels einen Winkel von so viel Graden, als der Quotient anzeigt. Die Schenkel dieses Winkels verlängert man bis an die Peripherie, so wird dadurch ein Bogen abgeschnitten, den man so vielmal in der ganzen Peripherie herumtragen kann, als die Figur Seiten haben soll. Z. E. Soll man ein reguläres Fünfeck in den Cirkel beschreiben, so dividire man 360° durch 5, wodurch 72° entsteht, und trage einen Winkel von 72 Grad durch Hülfe des Transporteurs an das Centrum C (Fig. 69 Tab. 5.) und ziehe die Schenkel CA und CF; der Bogen AF muß alsdenn nothwendig der fünfte Theil von der Peripherie seyn, und sich also fünfmal in derselben herum tragen lassen.

§. 114.

Lehrsatz. Die Winkel eines regulären Vielecks werden durch die aus ihren Spitzen gezogenen Halbmesser des Cirkels, worein das Vieleck beschrieben ist, in zwey gleiche Theile zergliedert.

Es sey (Fig 68. Tab. 5.) ein reguläres Sechseck in den Cirkel beschrieben, und CQ ein aus dem Winkel Q, den zwey Seiten dieses Vielecks mit einander machen, gezogener Halbmesser des Cirkels, so ist

$$e = x$$

Be-

Beweis.

Man ziehe noch die Halbmesser CD und CG, so ist

CD	=	CG	(§. 29.)
DQ	=	QG	(§. 15.)
CQ	=	CQ	(§. 9. Arithm.)
e	=	x	(§. 41.)

§. 115.

Aus dem vorigen Beweise erhellt zugleich, daß die Halbmesser eines Cirkels, in welchen ein reguläres Vieleck beschrieben worden ist, dasselbe in lauter gleiche Triangel zertheilen, wenn diese Halbmesser aus den Spitzen der Winkel, welche die Seiten mit einander machen, gezogen werden.

§. 116.

Lehrsatz. Die Seite eines regulären Sechsecks ist so groß, als der Radius desjenigen Cirkels, in welchen es beschrieben ist.

Es sey (Fig. 68.) GB die Seite eines regulären Sechsecks, und CG ein Radius, so ist

GB = CG

Beweis.

In dem Triangel CBG muß der Winkel am Mittelpuncte, nämlich BCG, den sechsten Theil von 360°, d. i. 60 Grad enthalten, weil das Maaß desselben, der Bogen BG, der sechste Theil der Peripherie ist. Die übrigen beyden Winkel CBG und

CGB müssen daher 180° — 60° d. i. 120° in der Summe ausmachen (§. 68.). Da aber die Seiten CB und CG, als Halbmesser eines Cirkels, gleich sind; so müssen auch die Winkel CBG und CGB einerley Grösse haben (§. 74.), und folglich jeder 60 Grad betragen. Weil nun also in dem Triangel CBG alle Winkel 60° enthalten; so muß der Triangel gleichseitig seyn, und daher auch

CB = CG (§. 77.)

§. 117.

Man kann also in einem gegebenen Cirkel sehr leicht ein reguläres Sechseck beschreiben, wenn man den Halbmesser sechsmal in der Peripherie herumträgt, und die Sehnen der Bogen ziehet. Theilt man nun den sechsten Theil der Peripherie in zwey gleiche Theile, so erhält man ein reguläres Zwölfeck, woraus man ferner sehen kann, wie sich ein 24 Eck u. s. w. in einem Cirkel beschreiben läßt.

§. 118.

Aufgabe. Die Summe aller Winkel in einem jeden geradelinichten Vielecke zu finden.

Auflösung.

Man multiplicire 180 Grad durch die Zahl der Seiten weniger zwey, so enthält das Product die Summe aller Winkel eines geradelinichten Vielecks. So ist z. E. die Summe aller Winkel in einem Fünfeck, es mag regulär oder irregulär seyn, 180 × 3, d. i. 540 Grad, in einem Sechseck 180 × 4, d. i.

720,

720, in einem Siebeneck 180 ∠ 5, d. i. 900 Grad u. s. f.

Beweis.

Wenn man in einer mittlern Gegend eines Vielecks einen beliebigen Punct erwählt, und von demselben gerade Linien in die Winkel des Vielecks zieht, so wird man so viel Triangel erhalten, als die Figur Seiten hat. Zieht man z. E. (Fig. 67. Tab. 5.) aus dem Puncte C in dem Fünfeck ABDFE die geraden Linien CD, CF, CE, CA und CB, so wird man fünf Triangel erhalten, deren Winkel zusammengenommen die Winkel des Fünfecks ausmachen, wenn man davon die Winkel um den Punct C abzieht. Nun betragen aber alle Winkel um den Punct C 360, d. i. 2 ∠ 180 Grad (§. 57.), und die Winkel in jedem Triangel 180, folglich in 5 Triangeln 5 ∠ 180. (§. 68.). Zieht man nun 2 ∠ 180° von 5 ∠ 180°, so bleibt unstreitig 3 ∠ 180° für die Summen aller Winkel in einem Fünfeck übrig. In einem Sechseck hätte man daher 2 ∠ 180° von 6 ∠ 180°, wodurch 4 ∠ 180° entstehet, in einem Siebeneck 2 ∠ 180° von 7 ∠ 180°, welches 5 ∠ 180° ist, subtrahiren müssen, um die Summe aller Winkel zu erhalten.

Man kann sich auch von diesem Satze folgendergestalt überzeugen. Durch die Diagonalen läßt sich jedes Vieleck in so viel Triangel zergliedern, als die Figur Seiten hat, weniger zwey. So würde man z. E. das Fünfeck (Fig. 85. Tab. 9.) in drey Triangel abtheilen können. Die Winkel dieser drey Triangel, d. i. 3 ∠ 180°, würden daher so viel betra-

tragen, als alle Winkel des Fünfecks. Aus einem Sechseck würde man durch Diagonalen 4 Triangel, aus einem Siebeneck 5 Triangel u. s. f. erhalten; folglich würde die Summe aller Winkel in einem Sechseck $4 \times 180^\circ$, in einem Siebeneck $5 \times 180^\circ$ seyn müssen.

§. 119.

Weil in einem regulären Vielecke alle Winkel einander gleich sind, so darf man nur die Summe der Winkel durch die Zahl der Seiten dividiren, wenn man den Winkel wissen will, den zwey Seiten eines regulären Vielecks mit einander machen, und den man auch sonst den **Polygonwinkel** zu nennen pflegt. Z. E. die Summe aller Winkel eines Fünfecks ist 3×180 Grad; folglich ist der Polygonwinkel in einem regulären Fünfeck $\frac{3 \times 180^\circ}{5}$ d. i. 108 Grad. Die Summe aller Winkel in einem Sechseck ist $4 \times 180^\circ$, folglich der Polygonwinkel eines regulären Sechsecks $\frac{4 \times 180^\circ}{6}$ d. i. 120 Grad.

Nun ist aber

$$\left.\begin{aligned} \frac{3 \times 180}{5} &= 3 \times \frac{180}{5} \\ \text{und } \frac{4 \times 180}{6} &= 4 \times \frac{180}{6} \end{aligned}\right\} \text{(§. 56. Ar.)}$$

woraus also erhellet, daß man überhaupt den Polygonwinkel eines regulären Vielecks bekömmt, wenn man 180 Grad durch die Zahl der Seiten weniger zwey

zwey multiplicirt, und dieses Product durch die Zahl der Seiten selbst dividirt, oder wenn man zuerst 180 Grad durch die Zahl der Seiten dividirt, und den Quotienten durch die Zahl der Seiten weniger zwey multiplicirt.

§. 120.

Lehrsatz. Um jedes reguläre Vieleck läßt sich ein Cirkel beschreiben.

Beweis.

Man theile die Polygonwinkel eines regulären Vielecks, z. E. des regulären Sechsecks (Fig. 68.) durch die geraden Linien CD, CQ, CG, CB, CA, CN in zwey gleiche Theile, und verlängere dieselben, bis sie zusammenstossen. Da nun, vermöge der Construction u und e halbe Polygonwinkel, und also einander gleich sind; so ist auch

$$CD = CQ \text{ (§. 76.)}$$

Ferner aus eben dem Grunde, weil $x = y$

$$CQ = CG \text{ (§. 76.)}$$

und also auch, weil überall eben dieselbe Ursache statt findet,

$$\begin{aligned} CG &= CB \\ CB &= CA \\ CA &= CN \\ CN &= CD \end{aligned}$$

Es läßt sich daher mit dem Halbmesser CD aus dem Puncte C ein Cirkel beschreiben, dessen Peripherie

durch alle Ecken des Vielecks gehen muß, weil diese alle gleich weit von dem Puncte C abstehen.

§. 121.

Man erhält also, wie man aus dem vorigen Beweise sehen kann, den Mittelpunct desjenigen Cirkels, in den ein reguläres Vieleck, von welchem die Seite gegeben ist, beschrieben werden kann, wenn man an die Endpuncte dieser Seiten die halben Polygonwinkel trägt, und die Schenkel derselben verlängert, bis sie zusammenstossen. Sollte man daher z. E. über die gegebene Linie AF (Fig. 69.) ein reguläres Fünfeck beschreiben, so suche man erstlich den Polygonwinkel, welcher 108° ist (§. 119.), die Hälfte davon, nämlich 54 Grad, trage man durch Hülfe des Transporteurs sowohl an den Punct A, als auch an den Punct F, und verlängere die Schenkel, bis sie einander durchschneiden. Aus dem Durchschnittspuncte C beschreibe man mit dem Halbmesser CF einen Cirkel, so muß sich AF fünfmal in demselben herumtragen lassen. Denn da die beyden Winkel CAF und CFA, vermöge der Construction, 108 Grad ausmachen, so beträgt der sogenannte Centriwinkel, nämlich der Winkel C, oder der Bogen AF, 180° — 108°, d. i. 72° (§. 68.), welches der fünfte Theil von der Peripherie ist. Hieraus wird man auch ferner einsehen, wie man andre reguläre Vielecke über eine gegebene Linie beschreiben könne. Man kann aber auch eben diese Absicht dadurch erreichen, wenn man statt des halben, den ganzen Polygonwinkel an den einen Endpunct der gegebenen Linie, z. E. bey einem regulären Fünfeck

einen Winkel von 108 Graden A trägt, hierauf den Schenkel AN so groß wie AF macht, und durch die drey Puncte F, A, N einen Cirkel beschreibt (§. 90.), worein sich AF so vielmal wird tragen lassen, als das Vieleck Seiten haben soll.

§. 122.

Ein reguläres Sechseck läßt sich geometrisch über eine gegebene Linie beschreiben, wenn man über dieselbe einen gleichseitigen Triangel errichtet, und aus der Spitze desselben einen Cirkel beschreibet. Denn da die Seite des Sechsecks dem Halbmesser gleich ist (§. 116.); so muß sich in diesem Falle die gegebene Linie sechsmal in dem damit beschriebenen Cirkel herumtragen lassen.

Drittes Capitel.

Von der Ausmessung der Figuren.

Weil alles Ausmessen einer Größe in der Vergleichung derselben mit einer bekannten Grösse von eben der Art bestehet (§. 2. Vorber.); so wird man leicht einsehen, daß man zum Maaß der Flächen wieder eine Fläche annehmen muß. Man hat daher gewisse Quadrate hierzu erwählet, weil sich keine der übrigen Figuren zu dieser Absicht so gut schickt,

und ihnen den Namen von der Länge ihrer Seiten gegeben. So heißt also eine **Quadrat- oder Flächen-Ruthe**, ein solches Quadrat, dessen Seite eine Ruthe lang ist; ein **Quadrat-Schuh** ein Quadrat, dessen Seite einen Schuh, ein **Quadrat-Zoll**, ein Quadrat, dessen Seite einen Zoll; und eine **Quadrat-Linie**, ein Quadrat, dessen Seite eine Linie beträgt. Hieraus wird man auch verstehen, was eine Quadrat-Meile, eine Quadrat-Elle, u. s. w. im gemeinen Leben bedeutet. Man bezeichnet aber die Flächen-Maaße auf eben die Art, wie die Längen-Maaße, nur daß man, wo es nöthig ist, sie von diesen zu unterscheiden, entweder ein kleines Quadrat, oder den Buchstaben q zu dem gewöhnlichen Zeichen setzt. So bedeutet z. E. der Ausdruck 435□°, 73□′, 52□″ eine Fläche, die 435 Quadrat-Ruthen, 73 Quadrat-Schuh, und 52 Quadrat-Zoll enthält. Weil man nun alle Flächen durch Quadrate auszumessen pflegt, so ist daher der Ausdruck **quadriren** entstanden, welcher nichts anders sagen will, als den Inhalt einer Fläche bestimmen.

§. 124.

Aufgabe. Ein Rectangulum auszumessen.

Auflösung.

Man untersuche, wie oft die Seite desjenigen Quadrats, das man zum Maasstabe erwählt hat, in ein Paar an einander liegenden Seiten des Rechtecks enthalten ist, und multiplicire die beyden Zahlen, welche die Länge dieser Seiten anzeigen, in einander, so muß das Product so viel Einheiten enthalten, als das auszumessende Rectangulum Quadrate ent-

enthält. Z. E. es sey GPRF (Fig. 62. Tab. 5.) das auszumessende Rectangulum, und das Quadrat GNCQ sey das Maaß. Die Seite dieses Quadrats GQ ist in der einen Seite des gegebenen Rechtecks GF viermal, und in der andern Seite GP dreymal enthalten. Man multiplicire also 4 in 3, so ist das Product 12 der Flächeninhalt des Rechtecks, d. h. das zum Maaß angenommene Quadrat GNCQ steckt in dem auszumessenden Rechtecke GPRF zwölfmal.

Beweis.

Weil die Linie GQ in der Linie GF viermal enthalten ist, so läßt sich das Quadrat GNCQ viermal über die Linie GF setzen; und weil GQ oder GN in der Linie GP dreymal enthalten ist, so kann man diese Reihe von vier Quadraten dreymal über einander stellen, um das Rechteck auszufüllen; folglich muß das gegebene Rechteck 4mal 3, d. i. 12 solche Quadrate, wie GNCQ, enthalten.

§. 125.

Weil ein Quadrat nichts anders ist, als ein Rechteck, das lauter gleiche Seiten hat, so findet man den Inhalt eines Quadrats, wenn man untersucht, wie oft die Seite des zum Maasstabe angenommenen Quadrats in einer Seite des auszumessenden Quadrats enthalten ist, und die Zahl, welche dieses anzeigt, in sich selbst multiplicirt. Wäre z. E. die Seite des auszumessenden Quadrats DAGB (Fig. 61. Tab. 5.) dreymal grösser, als die Seite des zum Maasstabe angenommenen Quadrats DFCQ, so würde das Product 3mal 3, d. i. 9, den Inhalt des gegebenen Quadrats anzeigen; nämlich

lich das gegebene Quadrat würde 9 solche Quadrate, wie DFCQ enthalten.

§. 126.

Hieraus wird man die Ursache einsehen, warum man in der Arithmetik diejenigen Producte, wo eine Zahl in sich selbst multiplicirt wird, Quadratzahlen nennt.

§. 127.

Man pflegt insgemein zu sagen, daß durch die Multiplication einer Linie mit einer Linie allemal eine Fläche entstehe, welches aber nicht gegründet ist, indem man in vielen Fällen durch die Multiplication der Linien auch wieder eine Linie erhält. Ueberhaupt aber multiplicirt man in dergleichen Fällen eigentlich nicht die Linien, sondern die Zahlen in einander, welche das Verhältnis der Linien gegen die angenommene Einheit ausdrücken. Die vorigen Beyspiele muß man sich eigentlich folgendergestalt vorstellen: wie sich verhält 1 zu 4 × 3, so verhält sich auch das zum Maasstabe angenommene Quadrat zu dem auszumessenden Rechtecke; und wie sich verhält 1 zu 3 × 3, so verhält sich das kleinere Quadrat DFCQ zu dem grössern Quadrate DAGB.

§. 128.

Das Verhältniß zweyer Quadrate muß man also nicht nach dem einfachen Verhältnis ihrer Seiten, sondern nach dem Verhältnisse der Quadratzahlen ihrer Seiten beurtheilen. Ist die Seite eines Quadrats zweymal so groß, als die Seite eines andern Quadrats, so ist das erste Quadrat selbst vier-

mal

mal so groß, als das andere Quadrat. Ist die Seite eines Quadrats fünfmal grösser, als die Seite eines andern, so ist das erste Quadrat selbst 25mal grösser als das andre, u. s. w.

§. 129.

Wenn man daher eine Quadratruthe durch einen Quadratschuh ausmessen will, so muß man 10 in sich selbst multipliciren, weil die Länge eines Quadratschuhs nach der geometrischen Eintheilung in der Länge einer Quadratruthe 10mal enthalten ist. Da nun 10 × 10 Hundert macht; so ist klar, daß eine Quadratruthe, wenn von der geometrischen Eintheilung die Rede ist, 100 Quadratschuh, und folglich auch ein Quadratschuh 100 Quadratzoll, und ein Quadratzoll 100 Quadratlinien enthält. Hieraus folgt also ferner, daß man bey Verwandlung eines kleinern Flächenmaaßes in ein grösseres nicht, wie beym Längenmaaße, nur eine, sondern allemal zwey Zifern, von der Rechten gegen die Linke zugerechnet, abschneiden müsse. Wollte man z. E. 14783925 Quadrat-Linien in Quadrat-Ruthen u. s. f. verwandeln; so würde man 14 Quadratruthen, 78 Quadratschuh, 39 Quadratzoll und 25 Quadratlinien erhalten. Hätte man im Längenmaaße die sogenannte Rheinländische Eintheilung angenommen, nach welcher die Ruthe in 12 Schuh, der Schuh in 12 Zoll u. s. f. getheilt wird; so müßte man auf die Quadratruthe 144 Quadratschuh, auf den Quadratschuh 144 Quadratzoll u. s. f. rechnen, weil 12 × 12 = 144.

§. 130.

Aufgabe. Ein schiefwinklichtes Parallelogram auszumessen.

Auf-

Auflösung.

Man erwähle sich eine Seite zur Grundlinie, und ziehe von derselben eine gerade Linie senkrecht auf die entgegengesetzte Seite, welche alsdenn die Höhe des Parallelograms vorstellen wird (§. 99.). Hierauf messe man sowohl die Grundlinie, als auch die Höhe, und multiplicire beyde in einander; so ist das Product der verlangte Inhalt. Es sey z. E. das Parallelogram NDSB (Fig 63. Tab. 5.) gegeben, die Grundlinie NB = 32‴, und die Höhe DC = 35‴, so ist der Inhalt desselben NB ⩘ DC, d. i. 35. ⩘ 32, oder wenn man wirklich multipliciret, 1120□‴ d. i. 11□″, 20□‴. Wäre NB = 3″ und DC = 35‴, so müßte auch NB durch Linien ausgedrückt, und nicht 35 durch 3, sondern durch 30, weil 3 Zoll 30 Linien ausmachen, multipliciret werden.

Beweis.

Man verlängere die Seite NB, und ziehe auf diese verlängerte Seite die Linie SA senkrecht; so muß das rechtwinklichte Parallelogram DSAC, welches hierdurch entsteht, dem schiefwinklichten Parallelogram NDSB gleich seyn (§. 98.). Nun ist der Inhalt von dem Rechteck DSAC das Product DS ⩘ DC (§. 129.); folglich muß auch dieses Product, welches wegen der Gleichheit der Seiten DS und NB (§. 93.), eben so groß ist, als das Product NB ⩘ DC, den Inhalt des schiefwinklichten Parallelograms anzeigen.

§. 131.

Wenn also zwey Parallelogrammen gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhen ha-

haben, so müssen sie sich, wie ihre Höhen, und sind die Höhen gleich, wie ihre Grundlinien verhalten.

Denn es heisse das erste Parallelogram P, seine Grundlinie G, seine Höhe aber H, so ist der Inhalt desselben $G \times H$ (§. 130.). Das andere Parallelogram heisse p, seine Grundlinie g, seine Höhe aber h, so ist der Inhalt desselben das Product $g \times h$ (§. 130.). Folglich

$$P : p = G \times H : g \times h$$

Ist nun $G = g$

$$\frac{P : p = G \times H : G \times h \quad (\text{§. 9. Ar.})}{P : p = \frac{G \times H}{G} : \frac{G \times h}{G} \quad (\text{§. 18. Ar.})}$$

d. i. $P : p = H : h$ (§. 19. Arithm.)

Auf eben die Art, wenn

$H = h$ und

$$P : p = G \times H : g \times h$$

$$\frac{P : p = G \times H : g \times H \quad (\text{§. 9. Ar.})}{P : P = \frac{G \times H}{H} : \frac{g \times H}{H} \quad (\text{§. 18. Ar.})}$$

d. i. $P : p = G : g$ (§. 19. Ar.)

§. 132.

Da ein jeder geradelinichter Triangel die Hälfte eines Parallelograms ist, welches eben dieselbe Grundlinie und Höhe hat (§. 102.), so muß der Inhalt eines geradelinichten Triangels ein halbes

Pro-

Product aus seiner Grundlinie in seine Höhe, oder welches eben so viel sagen will, ein Product aus der halben Höhe in die ganze Grundlinie, oder ein Product aus der ganzen Höhe in die halbe Grundlinie seyn. Soll man daher einen Triangel, z. E. den Triangel NFQ (Fig. 64. Tab. 5.) ausrechnen, so erwähle man eine Seite, z. E. NQ, zur Grundlinie, ziehe aus der entgegengesetzten Spitze die senkrechte Linie FB, welche in diesem Falle die Höhe vorstellt (§. 101.), so ist $\frac{1}{2}$ NQ × FB der Inhalt des Triangels NFQ. Aus eben dem Grunde würde der Inhalt des Triangels ACB (Fig. 65.), wenn man AB zur Grundlinie annehmen wollte, das Product $\frac{1}{2}$ AB × CG seyn (§. 101.). Es versteht sich von selbst, daß man hier, wie bey den vorigen Beyspielen, sowohl die Höhe als die Grundlinie messen und in gleichartige Zahlen verwandeln muß, wenn man sie wirklich in einander multipliciren will. Es sey z. E. in dem Triangel FNQ (Fig. 64.) die Grundlinie NQ = 16″, die Höhe FB = 12″; so beträgt der Flächeninhalt dieses Triangels $\frac{16 \times 12}{2}$ = 8 × 12 = 16 × 6 = 96 Quadratzoll. Es sey ferner in dem Triangel CAB (Fig. 65.) die Grundlinie AB = 13″, und die Höhe CG = 14″, so wird das halbe Product der Zahlen 13 und 14 d. i. 91, die Menge von Quadratzollen anzeigen, welche in diesem Triangel enthalten sind.

§. 133.

Weil sich Parallelogramme, wenn sie gleiche Grundlinien haben, wie die Höhen, und wenn sie glei-

gleiche Höhen haben, wie die Grundlinien verhalten (§. 131.), so ist klar, daß sich auch Triangel von gleichen Grundlinien, wie die Höhen, und Triangel von gleichen Höhen, wie die Grundlinien verhalten müssen; weil die Hälften eben das Verhältnis haben, wie die Ganzen (§. 103. Arithm.).

§. 134.

Da sich alle geradelinichte Figuren durch Diagonalen in Triangel zergliedern lassen, so sieht man leicht ein, wie es möglich sey, jede geradelinichte Figur auszumessen. Denn wäre z. E. das irreguläre Fünfeck ABSNQ (Fig. 66. Tab. 5.) gegeben, so dürfte man es nur durch die Linien SA und SQ, in die drey Triangel, ABS, ASQ und SQN zergliedern, jeden Triangel nach den vorigen Regeln ausrechnen, und den Inhalt aller drey Triangel zusammen addiren; welche Summe der Inhalt der ganzen Figur seyn muß.

§. 135.

Ist die Figur, welche man quadriren soll, regulär, wie z. E. das Sechseck ABGQDN, (Fig. 68. Tab. 5.) so kann man die Rechnung geschwinder vollenden, wenn man aus zwey unmittelbar auf einander folgenden Winkeln ein Paar Halbmesser, z. E. CD und CQ, ferner aus dem Mittelpuncte eine senkrechte Linie auf diejenige Seite ziehet, welche mit diesen beyden Halbmessern einen Triangel bildet, nämlich in gegenwärtigen Falle auf DQ, und das Product $\frac{1}{2}$ CP $\times$ DQ durch die Anzahl der Seiten, und also in diesem Falle durch 6 multiplicirt; weil

jedes reguläre Vieleck durch die Halbmesser, welche aus den Spitzen seiner Winkel gezogen werden, in lauter gleiche Triangel zergliedert wird (§. 115.), und die Anzahl solcher Triangel eben so groß seyn muß, als die Zahl der Seiten des Vielecks. Ist nun der Inhalt dieses Sechsecks $\frac{1}{2}$ CP ✕ DQ ✕ 6, so ist klar, daß ein Triangel eben so groß seyn würde, als dieses Sechseck, wenn seine Höhe CP, und seine Grundlinie 6 ✕ DQ wäre. CP ist der Abstand einer Seite von dem Mittelpuncte, und 6 ✕ DQ die Summe aller Seiten dieses Sechsecks. Folglich würde ein Triangel einer regulären Figur gleichen, wenn seine Grundlinie eben so groß wäre, als die Summe aller Seiten, welche man auch den Perimeter der Figur zu nennen pflegt, und seine Höhe so groß, als der Abstand einer Seite von dem Mittelpuncte.

§. 136.

Wenn man in einen Cirkel verschiedene reguläre Vielecke beschreibet; so wird man finden, daß sie dem Cirkel immer näher kommen, je grösser die Anzahl ihrer Seiten wird. So ist z. E. (Fig. 70. Tab. 5.) das Achteck nicht so viel von dem Cirkel unterschieden, als das Viereck, und das Sechzehneck noch weniger als das Achteck. Wollte man hier noch weiter gehen, und Polygone von mehr Seiten beschreiben; so würde man endlich ein solches Vieleck erhalten, dessen Seiten fast ganz in die Peripherie fielen, und dessen Unterschied von dem Cirkel nicht mehr zu bemerken wäre, in welchem Falle der Abstand einer Seite von dem Mittelpuncte mit dem Halbmesser des Cirkels einerley seyn müßte. Man

stellt

stellt sich daher den Cirkel als eine reguläre gerad-linichte Figur vor, die unendlich viel Seiten hat; und da eine reguläre Figur einem Triangel gleich ist, dessen Grundlinie so groß ist, als die Summe aller Seiten, oder der Umfang der Figur, und dessen Höhe so viel beträgt, als der Abstand einer Seite von dem Mittelpuncte (§. 135.), so muß auch der **Cirkel die Grösse eines Triangels haben, dessen Grundlinie der Peripherie, und dessen Höhe dem Halbmesser des Cirkels gleichet.** Man kann also den Cirkel quadriren, d. i. den Inhalt desselben finden, wenn man seine Peripherie in den halben Radium, oder welches eben so viel ist, in den vierten Theil des Diameters multiplicirt. Aus eben der Ursache muß auch der Inhalt eines Sectors ein Product aus seinem Bogen in den halben Radium seyn.

§. 137.

Weil die Peripherie des Cirkels eine krumme Linie ist, und daher durch eine gerade Linie nicht unmittelbar gemessen werden kann; so hat man sich seit langen Zeiten Mühe gegeben, ein Paar Zahlen zu finden, welche das Verhältniß des Diameters zu der Peripherie ausdrücken. Bis jetzt hat man noch kein Verhältniß entdeckt, welches nach der größten mathematischen Schärfe richtig wäre; denn die bisherigen sogenannten neuen Erfindungen von der Quadratur des Cirkels sind alle unrichtig, und rühren meistentheils von Leuten her, die keine richtigen Begriffe von diesen Dingen haben. Nach des Archimedis Bestimmung verhält sich der Diameter zu der Peripherie ohngefehr wie 7 : 22, welches Ver-

hältnis aber nicht so genau ist, als das gewöhnliche, dessen man sich meistentheils in der Ausübung zu bedienen pflegt, nämlich 100 : 314, bey welchem der Fehler nicht viel über $\frac{1}{1000}$ der Einheit beträgt, und welches eigentlich die ersten Zifern desjenigen Verhältnisses sind, welches Ludolph von Cölln gefunden hat, nach dessen Berechnung sich der Diameter zu der Peripherie verhält, wie

100000000000000000000000000000000

zu 31415926535897932384626433832795o

Weil aber die Zahlen dieses Verhältnisses Glieder von einer Reihe sind, welche ins unendliche fortgeht, so ist klar; daß man es nicht für ganz vollkommen richtig halten kann, ob sich gleich so viel erweisen läßt, daß der Fehler, der hierbey noch begangen wird, nicht

1

1000000000000000000000000000000000

der Einheit ausmacht.

§. 138.

Wenn wir also unterdessen annehmen, daß sich der Diameter zur Peripherie beynahe wie 100 : 314 verhält; so läßt sich durch Hülfe der Regel Detri zu dem gegebenen Diameter eines Cirkels die Peripherie, und daher auch, nach §. 134, der Inhalt des Cirkels selbst leicht finden. Z. E. es sey der Diame-

meter eines gegebenen Cirkels 24′, so schliesse man folgendergestalt, um die Peripherie zu finden:

100 : 314 = 24′ : Per.

24

1256

628

100) 75,36 (75′ $\frac{36}{100}$ = 75′, 3″, 6‴ = Per.

Verlangt man nun den Inhalt des Cirkels, so multiplicire man die gefundene Peripherie 7536‴ durch den vierten Theil des Diameters, wobey nur zu merken ist, daß man diesen vierten Theil auch durch Linien ausdrücken muß, weil die Peripherie Linien enthält. Der vierte Theil des Diameters ist in dem gegenwärtigen Falle 6′ oder 600‴

7536‴

600‴

Inhalt des Cirkels 4521600□‴

d. i. 4□°, 52□′, 16□″, (§. 128.)

§. 139.

Soll der Inhalt eines gegebenen Sectors, z. E. des Sectors ABNF (Fig. 71. Tab. 5.) gefunden werden, so messe man erstlich, vermittelst eines Maaßstabes, den Halbmesser AB oder BN, und vermittelst eines Transporteurs, den Winkel ABN. Es sey z. E. der Halbmesser AB = 18 Schuh, und der Winkel ABN = 80 Grad; nun untersuche man, wie viel der Bogen AFN, der eben so viel Grad enthält, als der Winkel ABN, nach dem Längen-

maaße beträgt. Dieses aber läßt sich finden, wenn man durch Hülfe des vorigen Verhältnisses aus dem Halbmesser die halbe Peripherie berechnet, (weil man hier die ganze Peripherie nicht nöthig hat,) und hernach so schliesset: wie sich die halbe Peripherie in Graden, zu dem Bogen AFN in Graden verhält; so verhält sich auch die halbe Peripherie im Längenmaaße, zu dem Bogen AFN in solchem Maaße. Weiß man nunmehr den Bogen AFN nach eben dem Längenmaaße, wodurch der Halbmesser bestimmt worden ist, so multiplicire man denselben in den halben Radium, so zeigt das Product den verlangten Inhalt des gegebenen Sectors an (§. 136.). Die Rechnung selbst würde folgende seyn. Weil sich die Halben wie die Ganzen verhalten; so kann man nicht nur schliessen, daß sich 100 zu 314 verhält, wie der ganze Diameter zu der ganzen Peripherie, sondern auch wie der halbe Diameter zu der halben Peripherie. Folglich läßt sich die halbe Peripherie aus dem gegebenen Halbmesser AB = 18′ also finden;

100 : 314 = 18′ : ½ Per.

18

2512

314

100)56,52 (56′ $\frac{52}{100}$ = 56′, 5″, 2‴ = ½ Per.

Da nun die halbe Peripherie 180° und der Bogen des Sectors 80° enthält, so schliesse man ferner:

180°

$$\frac{180^\circ}{2)\ 9} : \frac{80^\circ}{4} = \frac{5652''' : AFN}{22608\ (4}$$

$$9)\ 2512''' = \text{Bog. } AFN$$
$$900''' = 9' = \tfrac{1}{2}\ AB$$

Inhalt des Sectors
$$ABNF = 2260800\square''' = 2\square^\circ, 26\square', 08\square''$$
(§. 128.)

§. 140.

Weil der Sector ABNF (Fig. 71.) wenn man die Sehne AN ziehet, aus dem geradelinichten Triangel ABN, und dem Segment AFNA besteht; so ist klar, daß sich der Inhalt des Segments finden läßt, wenn man den Inhalt des Triangels ABN, von dem Inhalte des Sectors ABNF subtrahirt.

Viertes Capitel.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 141.

Man nennt die Figuren von einer Art ähnlich, in welchen gleiche Winkel und proportionirliche Seiten angetroffen werden, und zeigt die Aehnlichkeit durch das Zeichen ∽ an, wie schon oben (§. 25.) angemerkt worden ist. Es gehört also zur

Aehnlichkeit der Figuren dreyerley, nämlich erstlich eine gleiche Anzahl von Seiten, denn ein Dreyeck kann z. E. einem Vierecke nicht ähnlich seyn; zweytens einerley Winkel; und drittens einerley Verhältniß derjenigen Seiten, die einerley Winkel einschliessen.

§. 142.

Es ist daher jeder gleichseitige Triangel einem andern gleichseitigen Triangel, jedes Quadrat einem andern Quadrate, jedes reguläre Fünfeck einem andern regulären Fünfecke ähnlich; und überhaupt sind alle reguläre Figuren, die eine gleiche Anzahl von Seiten haben, folglich auch alle Cirkel einander ähnlich; weil man sich die Cirkel als reguläre Vielecke von einer unendlichen Anzahl Seiten vorstellen kann. (§. 136.)

§. 143.

Lehrsatz. *Wenn in einem geradelinichten Triangel eine Linie parallel mit einer Seite gezogen, und bis an die andern beyden Seiten des Triangels verlängert wird; so verhalten sich die beyden Seiten, welche diese Parallellinie durchschneidet, eben so, wie die obern oder untern Theile, welche durch dieselbe auf den beyden Seiten abgeschnitten werden.*

Es sey (Fig. 72. Tab. 5.) in dem Triangel PQR die Linie NM parallel mit der Seite QR; so muß sich verhalten

$$PQ : PR = PN : PM$$
oder $$PQ : PR = NQ : MR$$

Be-

Beweis.

Man ziehe die geraden Linien NR und MQ, so ist

$\triangle$ NMQ $=$ $\triangle$ NMR (§. 100.)
$\triangle$ NPM $=$ $\triangle$ NPM

$\triangle$ NMQ $+$ $\triangle$ NPM $=$ $\triangle$ NMR $+$ $\triangle$ NPM (§. 13. Arithm.)

d. i. $\triangle$ QPM $=$ $\triangle$ RPN (§. 10. Ar.)

Nimmt man nun in den beyden Triangeln QPM und NPM die Seiten PQ und PN zu Grundlinien an; so haben sie eine gemeinschaftliche Spitze M, und folglich einerley Höhe (§. 101.), welches auch von den Triangeln RPN und NPM gilt, welche die gemeinschaftliche Spitze N, und daher einerley Höhe haben, wenn man die Seite PR und PM als die Grundlinien betrachtet. Es verhält sich daher

$\triangle$ QPM : $\triangle$ NPM $=$ PQ : PN (§. 133.)
und weil $\triangle$ QPM $=$ $\triangle$ RPN nach dem vorigen Beweise

---

$\triangle$ RPN : $\triangle$ NPM $=$ PQ : PN (§. 9. Ar.)
Ferner $\triangle$ RPN : $\triangle$ NPM $=$ PR : PM (§. 133.)

PQ : PN $=$ PR : PM (§. 11. Ar.)

---

alternando PQ : PR $=$ PN : PM (§. 100. Ar.)

Aus der vorigen Proportion

PQ : PN $=$ PR : PM, folgt ferner

PQ $-$ PN : PN $=$ PR $-$ PM : PM (§. 106. Ar.)
d. i. NQ : PN $=$ MR : PM

---

altern. NQ : MR $=$ PN : PM (§. 100. Arithm.)
PQ : PR $=$ PN : PM wie schon erwiesen worden.

PQ : PR $=$ NQ : MR (§. 11. Arithm.)

§. 144.

Lehrsatz. Wenn zwey Seiten eines geradelinichten Triangels durch eine gerade Linie dergestalt durchschnitten werden, daß sich dieselben eben so verhalten, wie die obern oder wie die untern Theile, die dadurch entstehen; so muß diese gerade Linie mit der entgegenstehenden Seite des Triangels parallel seyn.

Es durchschneide die Linie DF (Fig. 73. Tab. 5.) die Seiten AB und AC des Triangels ABC, und es verhalte sich

$$AB : AC = AD : AF$$

so ist DF parallel mit BC.

Beweis.

Will man nicht zugeben, daß DF unter der angenommenen Bedingung parallel mit BC sey; so ziehe man eine andere Linie durch den Punct D parallel mit BC (§. 67.). Diese Parallellinie muß entweder über oder unter DF fallen. Wir wollen setzen, sie falle unter DF, und heisse DN; so verhält sich

$$AB : AC = AD : AN \quad (\S.\ 143.)$$

Aber $AB : AC = AD : AF$ vermöge der angenommenen Bedingung.

$$AD : AF = AD : AN \quad (\S.\ 11.\ \text{Arithm.})$$

altern. $AD : AD = AF : AN \quad (\S.\ 100.\ \text{Arithm.})$

$$AD = AD$$

$$AF = AN$$

Das

Das heißt, der Theil AF ist so groß, wie das Ganze AN. Da nun dieses unmöglich ist, und man diese Unmöglichkeit auch erhalten würde, wenn man annähme, die Parallellinie mit BC durch den Punct D fiele über DF, so ist klar, daß unter der angenommenen Bedingung DF selbst mit BC parallel seyn müsse.

§. 145.

Lehrsatz. **Wenn in einem Triangel zwey Winkel, einzeln genommen, eben so groß sind, als zwey Winkel in einem andern Triangel, so sind die beyden Triangel einander ähnlich, d. h. es ist auch der dritte Winkel des ersten Triangels so groß, als der dritte Winkel des andern, und die Seiten, welche einerley Winkel einschliessen, und einerley Winkeln gegenüberstehen, haben in beyden Triangeln einerley Verhältniß.**

Es sey (Fig. 75. Tab. 5.) in den beyden Triangeln CAG und cag

$$C = c$$
$$A = a$$

---

so ist $\triangle CAG \sim \triangle cag$
d. h. auch $G = g$
und $CA : CG = ca : cg$
$CA : AG = ca : ag$
$AG : GC = ag : gc$

Beweis.

Die Gleichheit der Winkel G und g folgt schon aus der Gleichheit der übrigen beyden (§. 71.).

Daß aber die Seiten, welche einerley Winkel in beyden Triangel einschliessen, einerley Verhältniß haben, läßt sich folgendergestalt zeigen. Man trage auf die Schenkel des Winkels C in dem grössern Triangel, die beyden Seiten, welche den Winkel c, der ihm gleich ist, in dem kleinern Triangel einschliessen, und mache also

CR = ca

und CQ = cg

Weil nun auch C = c vermöge der Bedingung.

---

so ist, wenn man die Linie RQ ziehet

< CRQ = a (§. 37.)

Und weil A = a vermöge der Bedingung.

< CRQ = A (§. 11. Arithm.)

RQ parallel mit AG (§. 62.)

CA : CG = CR : CQ (§. 143.)

CR = ca und CQ = cg vermöge der Construction.

CA : CG = ca : cg (§. 9. Arithm.)

Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch die übrigen Seiten in beyden Triangeln, die einerley Winkel einschliessen, einerley Verhältniß haben. Denn man trage nunmehr auf die Schenkel des Winkels A in dem grössern Triangel, die Seiten ca und ag, welche den gleichen Winkel a in dem andern Triangel einschliessen, und mache

NA = ca

und AM = ag. Wird nun die Linie NM gezogen,

so ist, weil A = a vermöge der Bedingung des Satzes.

< ANM = c (§. 37.)

C = c vermöge der Bedingung des Satzes.

< ANM = C (§. 11. Arithm.)

NM parallel mit CG (§. 62.)

CA : AG = NA : AM (§. 143.)

ca = NA und ag = AM vermöge der Constr.

CA : AG = ca : ag

Wenn man die vorige Proportion

CA : CG = ca : cg

und die jetzt erwiesene

CA : AG = ca : ag

mit einander vergleicht, so wird man auch die Wahrheit der dritten, welche noch zur Aehnlichkeit dieser beyden Triangel gehört,

AG : GC = ag : gc

ohne Schwierigkeit einsehen. Denn aus der ersten folgt alternando diese

CA : ca = CG : cg) (§. 100. Arithm.)

und aus der CA : ca = AG : ag)

andern

AG : ag = CG : cg (§. 11. Arithm.)

alternando AG : CG = ag : cg (§. 100. Arithm.)

§. 146.

Wenn also in einem Triangel eine Linie, wie NM (Fig. 72. Tab. 5.) parallel mit einer Seite QR gezogen wird; so muß der obere Theil des Triangels PNM dem ganzen Triangel PQR ähnlich seyn; woraus sich ausser den §. 143. angeführten Proportionen noch folgende herleiten lassen:

PN : NM = PQ : QR
oder PN : PQ = NM : QR (§. 100. Ar.)
PM : NM = PR : QR
oder PM : PR = NM : QR (§. 100. Ar.)

§. 147.

Lehrsatz. Wenn ein Winkel in einem Triangel so groß ist, als ein Winkel in einem andern Triangel, und die beyden Seiten, welche diese Winkel einschliessen, in beyden Triangeln einerley Verhältniß haben, so sind diese Triangel einander ähnlich.

Es sey (Fig. 75. Tab. 5.) in den Triangeln CAG und cag

C = c
und CA : CG = ca : cg

so ist △ CAG ∽ △ cag

Beweis.

Man mache CR = ca
und CQ = cg
so ist, weil C = c vermöge der Bedingung.

< CRQ = a (§. 37.)

Weil nun ferner, vermöge der angenommenen Bedingung des Satzes,

CA

CA : CG = ca : cg
d. i. CA : CG = CR : CQ (§. 9. Ar.)

RQ parallel mit AG (§. 144.)

< CRQ = A (§. 65.)
Es war aber vorhin < CRQ = a

A = a (§. 11. Ar.)
und daher der Triangel CAG dem Triangel cag ähnlich (§. 145.).

§. 148.

Lehrsatz. Wenn alle drey Seiten in einem Triangel eben das Verhältniß haben, wie die Seiten in einem andern Triangel, so müssen die beyden Triangel einander ähnlich seyn, d. h. es müssen auch die Winkel, die von proportionirlichen Seiten eingeschlossen werden, in beyden Triangeln einander gleich seyn.

Wenn (Fig. 75. Tab. 5.)

CA : CG = ca : cg
und CG : AG = cg : ag

---

so ist C = c
G = g
A = a

Beweis.

Man mache wieder CR = ca und CQ = cg, und ziehe die gerade Linie RQ. Weil nun, vermöge der angenommenen Bedingung,

CA

CA : CG = ca : cg

so verhält sich auch CA : CG = CR : CQ (§. 9. Ar.)

Folglich RQ parallel mit AG (§. 144.)

und daher CQ : RQ = CG : AG (§. 146.)
CG : AG = cg : ag vermöge der Bedingung.

CQ : RQ = cg : ag (§. 11. Ar.)

alternando CQ : cg = RQ : ag (§. 100. Ar.)
CQ = cg vermöge der Construction.

Folglich auch RQ = ag (§. 89. Arithm.)

$$\left.\begin{array}{r} C = c \\ CQR = g \end{array}\right\} \text{(§. 41.)}$$
$$CQR = G \quad \text{(§. 65.)}$$

G = g (§. 11. Arithm.)
A = a (§. 71.)

§. 149.

Aus diesen drey Lehrsätzen von der Aehnlichkeit der Triangel lassen sich auch dreyerley Arten, ähnliche Triangel zu beschreiben, herleiten, wovon in dem folgenden Capitel Beyspiele vorkommen werden.

§. 150.

Aufgabe. Zu drey gegebenen Linien die vierte Proportionallinie zu finden.

Auflösung.

Es mögen (Fig. 74. Tab. 5.) FB, NR und SQ die drey gegebenen Linien seyn, zu welchen die vier-

vierte Proportionallinie gesucht werden soll. Man trage erstlich auf die Schenkel eines Winkels A, den man sich nach Belieben erwählen kann, die ersten beyden von den gegebenen Linien, so daß AF = FB und AN = NR wird, und ziehe die gerade Linie FN. Auf denjenigen Schenkel, auf welchen man die erste Linie getragen hat, trage man auch die dritte, so daß AS = SQ. Durch den Punct S ziehe man die Linie SM parallel mit FN; so muß AM die verlangte vierte Proportionallinie seyn; d. h. es muß sich verhalten

FB : NR = SQ : AM

Beweis.

Weil vermöge der Construction

FN parallel mit SM

---

so verhält sich AF : AN = AS : AM (§. 143.)

und weil AF = FB, AN = NR und AS = SQ vermöge der Construction.

FB : NR = SQ : AM (§. 9. Ar.)

§. 151.

Sollte zu zwey gegebenen Linien die dritte Proportionallinie gefunden werden, in welchem Falle jederzeit von einer stetigen Proportion die Rede ist, so darf nur die zweyte Linie zweymal gesetzt, und zugleich als die dritte betrachtet werden.

§. 152.

Aufgabe. Zu zwey gegebenen Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auflösung.

Es mögen (Fig. 79. Tab. 6.) die beyden Linien PA und MC gegeben seyn. Man trage dieselben auf eine gerade Linie neben einander, und mache

$$CN = PA$$
$$\text{und } NG = MC$$

Die Linie CG, welche die Summe der beyden gegebenen Linien ist, theile man in zwey gleiche Theile, und beschreibe mit der Hälfte QC den halben Cirkel CBG. Hierauf errichte man aus dem Puncte N, wo die beyden gegebenen Linien an einander gesetzet worden sind, eine senkrechte Linie, und verlängere dieselbe bis an die Peripherie dieses halben Cirkels; so muß diese Linie BN die mittlere Proportionallinie zu den beyden gegebenen Linien PA und MC seyn; d. h. es muß sich verhalten

$$PA : BN = BN : MC.$$

Beweis.

Man ziehe die Linien BC und BG, so ist der Winkel CBG ein rechter Winkel (§. 84). Da nun, weil BN auf CG senkrecht gezogen worden, r ebenfalls ein rechter Winkel ist, so folgt, daß

$$< CBG$$

$< CBG = r$
$C = C$ (§. 9. Arithm.)

$o = G$ (§. 71.)
$r = n$ vermöge der Construction.

$\triangle CBN \sim \triangle BNG$ (§. 145.)
d. i. $CN : BN = BN : NG$
oder weil $CN = PA$ und $NG = MC$ vermöge der Construction.

$PA : BN = BN : MC$

§. 153.

Der Triangel CBG, wie vorhin erwiesen wurde, ist ein rechtwinklichter Triangel, CG die Hypotenuse, und BN senkrecht auf derselben. Weil sich nun verhält

$$CN : BN = BN : NG$$

so ist klar, daß die senkrechte Linie, welche man in einem rechtwinklichten Triangel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse ziehen kann, die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Theilen der Hypotenuse ist, die durch diese senkrechte Linie abgeschnitten werden. Und weil auch CG der Diameter in dem halben Cirkel CBG ist; so erhellet zugleich, ohne fernern Beweis, die Wahrheit des folgenden Satzes. Wenn man aus einem beliebigen Puncte der Peripherie eines Cirkels eine Linie senkrecht auf den Diameter ziehet; so ist diese senkrechte Linie allemal die mittlere Proportionallinie zu den

beyden durch dieselbe abgeschnittenen Theilen des Diameters.

§. 154.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in so viel gleiche Theile zu theilen, als verlangt wird.

Auflösung.

Es sey (Fig. 77. Tab. 6.) die gegebene Linie PN in drey gleiche Theile zu theilen. Man trage auf eine Linie von unbestimmter Länge, wie z. E. BR, so viel gleiche willkührliche Theile, als die gegebene Linie enthalten soll, also in dem gegenwärtigen Falle drey, und mache daher BM = MQ = QC. Ueber die Linie BC, welche aus den drey gleichen Stücken bestehet, beschreibe man den gleichseitigen Triangel ABC, trage auf die Schenkel AB und AC die gegebene Linie PN, so daß AF = AG = PN, ziehe die Linie FG, und verbinde die Spitze des Triangels A mit den Puncten M und Q durch gerade Linien, so muß die Linie FG der gegebenen Linie PN gleich, und FS der dritte Theil von FG oder PN seyn.

Beweis.

Weil AB = AC und AF = AG, vermöge der Construction; so verhält sich

AB : AC = AF : AG

FG parallel mit BC (§. 144.)

AB : BC = AF : FG (§. 146.)
AB = BC vermöge der Construction.

AF = FG
AF = PN vermöge der Constr.

FG = PN (§. 11. Ar.)

Nun ist FS parallel mit BM, weil FG parallel mit BC; folglich

AF : FS = AB : BM (§. 146.)
AF = FG und AB = BC

FG : FS = BC : BM (§. 9. Ar.)
BC : BM = 3 : 1 vermöge der Constr.

FG : FS = 3 : 1 (§. 11. Ar.)

§. 155.

Auf eben die Art läßt sich auch eine gegebene Linie z. E. FR (Fig. 78.) nach eben der Proportion theilen, nach welcher eine andere gegebene Linie z. E. NQ eingetheilt ist. Denn man beschreibe über die Linie NQ einen gleichseitigen Triangel, und trage auf die Seiten CN und CQ die gegebene Linie FR, so daß CP = CS = FR, ziehe die Linien PS, CF und CG, so muß PS = FR, und nach eben dem Verhältnis, wie NQ getheilt seyn.

§. 156.

Lehrsatz. Wenn von einem Puncte, ausserhalb der Peripherie eines Cirkels, zwey gerade Linien in den Cirkel gezogen werden; so verhalten sich diese Linien umgewendet wie ihre Theile, die sich ausser dem Cirkel zwischen dem Puncte und der Peripherie befinden.

Es sey (Fig. 108. Tab. 12.) von dem Puncte A sowohl die gerade Linie AN, als auch AQ, in den Cirkel CPQN gezogen; so verhält sich

$$AN : AQ = AP : AC$$

Beweis.

Man ziehe die geraden Linien CP und NQ, so entstehen die Triangel ACP und ANQ, deren Aehnlichkeit sich folgendergestalt zeigen läßt. Der Winkel CPQ ist ein Winkel an der Peripherie, und hat daher zu seinem Maaße den halben Bogen CNQ (§. 83.). Der Winkel bey N ist ebenfalls ein Winkel an der Peripherie, und daher der halbe Bogen CPQ sein Maaß. Da nun beyde Bogen die ganze Peripherie oder 360° ausmachen, so ist klar, daß die Summe dieser beyden Winkel 180 Grad beträgt. Ist also

$$\angle CPQ + \angle N = 180°$$
$$\text{und } \angle CPQ + \angle CPA = 180° \quad (\text{§. 55.})$$

$$\angle CPQ + \angle N = \angle CPQ + \angle CPA \quad (\text{§. 11. Ar.})$$

$$\angle N = \angle CPA \quad (\text{§. 14. Ar.})$$
$$\angle A = \angle A$$

$$\triangle ANQ \sim \triangle ACP$$
$$\text{und } AN : AQ = AP : AC \quad (\text{§. 145.})$$

§. 157.

§. 157.

Lehrsatz. Sind zwey Figuren einander ähnlich, so verhalten sich ihre Perimeter, wie diejenigen einzelnen Seiten in beyden Figuren, die an einerley Winkel liegen.

Es sey (Fig. 85. Tab. 9.) die Figur dfabc der Figur DFABC ähnlich, d. h.

$$\angle fab = \angle FAB$$
$$\angle b = \angle B$$
$$\angle bcd = \angle BCD \text{ &c.}$$
$$\text{und } fa : ab = FA : AB$$
$$\text{oder altern. } fa : FA = ab : AB \text{ &c.}$$

---

so muß sich verhalten

$$fa + ab + bc + cd + df :$$
$$FA + AB + BC + CD + DF =$$
$$df : DF$$
$$\text{oder} = fa : FA$$
$$\text{oder} = ab : AB$$
$$\text{oder} = bc : BC$$
$$\text{oder} = cd : CD$$

Beweis.

Vermöge der angenommenen Bedingung verhält sich

fa : ab = FA : AB (§. 141.)

fa + ab : ab = FA + AB : AB (§. 105. Ar.)

fa + ab : FA + AB = ab : AB (§. 100. Arithm.)
ab : AB = bc : BC vermöge der Bedingung.

fa + ab : FA + AB = bc : BC (§. 11. Ar.)

fa + ab : bc = FA + AB : BC (§ 100. Ar.)

fa + ab + bc : bc = FA + AB + BC : BC (§. 105. Ar.)

fa + ab + bc : FA + AB + BC = bc : BC (§. 100. Ar.)
bc : BC = cd : CD vermöge der Aehnlichkeit der Figuren.

fa + ab + bc : FA + AB + BC = cd : CD (§. 11. Ar.)

fa + ab + bc : cd = FA + AB + BC : CD (§. 100. Ar.)

fa + ab + bc + cd : cd = FA + AB + BC + CD : CD (§. 105. Ar.)

fa + ab + bc + cd : FA + AB + BC + CD = cd : CD (§. 100. Ar.)
cd : CD = df : DF wegen der Aehnl. der Fig.

fa + ab + bc + cd : FA + AB + BC + CD = df : DF (§. 11. Ar.)

fa + ab + bc + cd : df = FA + AB + BC + CD : DF (§. 100. Ar.)

fa + ab + bc + cd + df : df
= FA + AB + BC + CD + DF : DF (§. 105. Ar.)

fa + ab + bc + cd + df : FA + AB + BC + CD + DF
= df : DF (§. 100. Ar.)

Da

Da sich nun, vermöge der Aehnlichkeit beyder Figuren, die Seiten df und DF eben so verhalten, wie die Seiten fa und FA, und diese wie ab und AB u. s. f. so ist klar, daß man statt des Verhältnisses df : DF auch das Verhältniß fa : FA oder ab : AB u. s. f. setzen kann.

§. 158.

Man ziehe in den beyden ähnlichen Figuren (Fig. 85.) Diagonallinien aus gleichen Winkeln, z. E. fc und FC, oder ac und AC; so muß der Triangel fdc dem Triangel FDC, der Triangel fac dem Triangel FAC, und der Triangel abc dem Triangel ABC ähnlich seyn. Denn da die beyden Figuren, vermöge der angenommenen Bedingung, einander ähnlich sind, und folglich gleiche Winkel und proportionirliche Seiten haben; so ist

$$d = D$$
$$fd : dc = FD : DC$$

$$\text{und } \begin{matrix} \triangle \\ < \end{matrix} \begin{matrix} fdc \\ dfc \end{matrix} \begin{matrix} \sim \\ = \end{matrix} \begin{matrix} \triangle \\ < \end{matrix} \begin{matrix} FDC \\ DFC \end{matrix} \quad \text{(§. 147.)}$$

Auf eben die Art ist klar, weil

$$b = B$$
$$\text{und } ab : bc = AB : BC$$

$$\text{daß } \begin{matrix} \triangle \\ < \end{matrix} \begin{matrix} abc \\ cab \end{matrix} \begin{matrix} \sim \\ = \end{matrix} \begin{matrix} \triangle \\ < \end{matrix} \begin{matrix} ABC \\ CAB \end{matrix} \quad \text{(§. 147.)}$$

Weil nun, vermöge der Bedingung des Satzes, nämlich vermöge der Aehnlichkeit beyder Figuren,

$< dfa = < DFA$
und $< dfc = < DFC$, wie jetzt erwiesen wurde;

$< dfa - < dfc = < DFA - < DFC$ (§. 14. Arithm.)
d. i. $< cfa = < CFA$

Weil ferner, wegen Aehnlichkeit der Figuren,
$< fab = < FAB$
und $< cab = < CAB$ wie vorhin erwiesen worden;

$< fab - < cab = < FAB - < CAB$ (§. 14. Ar.)
d. i. $< fac = < FAC$

$\triangle fca \sim \triangle FCA$ (§. 145.)

§. 159.

Es verhalten sich daher die Perimeter ähnlicher Figuren auch wie alle Diagonallinien, die aus einerley Winkel gezogen werden. Z. E. in den vorigen beyden Figuren

$fa + ab + bc + cd + df : FA + AB + BC + CD + DF = fc : FC$
oder $= ac : AC$

Denn weil $\triangle dfc \sim \triangle DFC$ (§. 158.)

$df : fc = DF : FC$ (§. 141.)

$df : DF = fc : FC$ (§. 100. Ar.)
$fa + ab + bc + cd + df : FA + AB + BC + CD + DF = df : DF$ (§. 157.)

$fa + ab + bc + cd + df : FA + AB + BC + CD + DF = fc : FC$ (§. 11. Ar.)
$fc : FC = ac : AC$, weil $\triangle fca \sim \triangle FCA$ (§. 158.)

$fa + ab + bc + cd + df : FA + AB + BC + CD + DF = Aac : C$ (§. 11. Ar.)

§. 160.

§. 160.

Da man sich die Cirkel als geradelinichte Figuren von unendlich viel Seiten vorstellen kann, und alle Cirkel einander ähnlich sind (§. 142.); so müssen sich die Peripherien der Cirkel wie ihre Diameter verhalten, weil man die Diameter als Diagonallinien, die aus einerley Winkeln gezogen werden, betrachten kann.

§. 161.

Wir wollen daher zwey Cirkel mit einander vergleichen. Der erste Cirkel heisse c, sein Diameter d, und seine Peripherie p; der andere C, sein Diamter D, und die Peripherie P: so ist, weil man den Inhalt eines Cirkels findet, wenn man den vierten Theil des Diameters in die Peripherie multiplicirt,

$$\left.\begin{array}{l} c = \frac{1}{4}\,dp \\ C = \frac{1}{4}\,DP \end{array}\right\} \text{(§. 138.)}$$

$$c : C = \tfrac{1}{4}\,dp : \tfrac{1}{4}\,DP$$

$$c : C = dp : DP \quad \text{(§. 101. Ar.)}$$

$$\text{oder } c : C = d : D + p : P \quad \text{(§. 110. Ar.)}$$
$$p : P = d : D \quad \text{(§. 160.)}$$

$$c : C = d : D + d : D \quad \text{(§. 9. Ar.)}$$
$$\text{oder } c : C = d \times d : D \times D \quad \text{(§. 110. Ar.)}$$

d. h. die Cirkelflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter. Ist also der Dia-

meter eines Cirkels zweymal so groß, als der Diameter eines andern Cirkels; so ist der erste Cirkel selbst viermal grösser, als der andere. Wäre der Diameter eines Cirkels dreymal so groß, als der Diameter eines andern; so würde der erste Cirkel selbst 9mal grösser seyn, als der andere u. s. f.

§. 162.

Weil der Radius die Hälfte eines Diameters ist, und das Verhältniß der Hälften und der Ganzen einerley seyn muß (§. 103. Ar.); so ist klar, daß sich auch die Peripherien der Cirkel, wie die Halbmesser derselben, und die Cirkelflächen selbst wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten müssen.

Fünftes Capitel.

Von der Ausübung der Geometrie auf dem Felde.

§. 163.

Damit Anfänger doch einigermaßen den Nutzen einsehen mögen, welche die bisher erklärten geometrischen Sätze auch im gemeinen Leben haben; so soll jetzt kürzlich gezeigt werden, wie man durch Hülfe derselben Weiten, Höhen und Flächen auf dem

dem Felde messen könne. Da aber der enge Raum dieser Blätter keine ausführliche Abhandlung über diese Materie erlaubet, so kann ich mich hier in keine genaue Beschreibung der Instrumente, die zu der Ausübung der Geometrie nöthig sind, einlassen, zumal da hierzu viele Zeichnungen nöthig seyn würden, und Anfänger über dieses bey einem Mechanico viel deutlichere Begriffe, als bey einem Schriftsteller von diesen Dingen erlangen können. Ausführliche und deutliche Belehrung über die Anwendung der Geometrie auf das Feldmessen findet man unter andern in der von dem Herrn Geh. Rath Böhm zu Giesen herausgegebenen gründlichen Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde; ingleichen in Hrn. Joh. Tob. Mayers gründlichem und ausführlichem Unterrichte zur praktischen Geometrie.

§. 164.

Jede Ausmessung einer Weite und Höhe, die sich nicht unmittelbar messen läßt, wird dadurch bewerkstelliget, daß man sich die gerade Linie, wodurch die Entfernung oder Höhe eines Orts bestimmt wird, als die Seite eines Triangels vorstellt, und von diesem Triangel so viel zu finden sucht, als hinlänglich ist, einen gleichen oder ähnlichen Triangel zu machen; daher man die folgenden Aufgaben leicht verstehen wird, wenn man die Sätze von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Triangel wohl verstanden hat.

§. 165.

Die Puncte pflegt man sich auf dem Felde durch Stäbe vorzustellen, die man senkrecht in die Erde

steckt, wofern nicht schon an dem Orte, wo das Ende einer Linie seyn soll, ein Baum oder anderes Merkmal sich befindet. Die geraden Linien, welche nicht allzulang sind, bestimmt man durch zwey Stäbe, die man an ihre Endpuncte setzet. Bey langen Linien pflegt man auch in der Mitten noch einige Stäbe einzustecken. Man kann aber leicht sehen, ob ein mittler Stab mit den beyden äussersten, welche die Endpuncte vorstellen, in gerader Linie stehet, wenn man mit einem Auge von dem einen der äussersten Stäbe gegen den andern zu siehet, und Achtung giebt, ob alle mittlere Stäbe dadurch verdeckt werden.

§. 166.

Zu der unmittelbaren Messung der Linien auf dem Felde bedient man sich gemeiniglich einer Kette, Stange, oder Schnur, welche in Ruthen und Schuh eingetheilt sind. Auch lassen sich dergleichen Messungen, sonderlich wenn sie sehr lange Linien betreffen, vermittelst besonders hierzu verfertigten Räder bewerkstelligen. Bey den Schnuren ist nur dieses zu merken, daß sie von der Feuchtigkeit der Luft viel kürzer, und von der Trockenheit derselben viel länger werden, wofern sie nicht zuvor in Leinöl gesotten, und durch und durch mit Wachs getränkt worden sind.

§. 167.

Durch Hülfe einer blossen Schnur oder Kette läßt sich leicht ein Winkel auf dem Felde an jeden Punct einer gegebenen Linie tragen, wenn man nur dasjenige auf dem Felde verrichtet, was oben (§. 46.)

auf

auf dem Papiere gezeigt worden ist. Denn es sey (Fig. 34. Tab. 3.) A ein Winkel auf dem Felde, und C ein gegebener Punct einer geraden Linie, an welchen der Winkel A gesetzt werden soll. Man erwähle sich auf den Schenkeln des Winkels A zwey beliebige Puncte, z. E. N und G. Hierauf messe man erstlich die Linie AG und mache CD = AG. Ferner messe man auch AN und NG, und mache sich eine Schnur, die so groß ist, als beyde Linien zusammen genommen, doch so, daß man sich den Punct N, welcher der Endpunct von AN ist, durch ein Merkmal an der Schnur bezeichnet. Die beyden Ende dieser Schnur stecke man an die Puncte C und D, dehne sie alsdenn an dem Puncte N aus, und stecke an den Ort B, wo dieser Punct hintrift, einen Stab; so muß der Winkel C, welchen die Linien BC und DC mit einander machen, dem Winkel A vollkommen gleich seyn. Denn vermöge der Construction, ist in den beyden Triangeln CBD und ANG,

CD = AG
CB = AN
BD = NG

Folglich C = A (§. 41.)

§. 168.

Wenn man auf dem Papiere Figuren im Kleinen entwerfen will, die gewissen grössern Figuren auf dem Felde ähnlich seyn sollen, welches man ein Feld *aufnehmen* oder *in Grund legen* heißt; so braucht

braucht man hierzu einen Maasstab, durch welchen sich die gewöhnlichen Längen-Maaße im Kleinen vorstellen lassen. Ein solcher Maasstab wird daher auch ein verjüngter Maasstab genannt; weil man in der ausübenden Geometrie durch das Wort verjüngen nichts anders versteht, als eine kleine Linie einer grössern Linie, oder eine kleinere Figur einer grössern Figur ähnlich zu machen. Die Construction aber eines solchen Maasstabes ist folgende, wenn er Ruthen, Schuh u. s. f. nach der geometrischen Eintheilung vorstellen soll. Man trage (Fig. 76. Tab. 6.) auf eine unbestimmte Linie zehen willkührlich angenommene gleiche Theile, so daß die daraus entstehende Linie AB zehn solche Linien wie NB enthält. Die Linie AB selbst trage man ferner so oft auf die Linie AC, als es die Länge derselben erlaubet. An die Endpuncte A, B und C errichte man senkrechte Linien von unbestimmter Länge, und trage auf die eine derselben, z. E. auf PA oder SB ebenfalls zehn willkührliche angenommene gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspuncte a, b, c, d, &c. gerade Linien parallel mit AC. Diese Parallellinien lassen sich am leichtesten und genausten ziehen, wenn man die auf SB getragenen gleichen Theile Sa, ab, bc, &c. auch auf die Linie PA oder QC trägt; denn in diesem Falle darf man nur das Linial an diejenigen Puncte anlegen, die gleichweit von den Endpuncten der Linien SB und PA oder QC entfernt sind. Auf die oberste Linie PQ trage man ferner die Theile der untersten Linie AC, so das Sr = NB u. s. f. gemacht wird. Endlich ziehe man noch die Linien SN u. s. f. wie man aus der Figur ersehen kann; so ist der verjüngte Maasstab fertig. Läßt man nun

die

die Linie AB eine Ruthe bedeuten, so wird NB oder Sr einen Schuh, qa einen Zoll, rb zwey Zoll, gc drey Zoll, nd vier Zoll, fe fünf Zoll u. s. f. vorstellen. Denn, weil vermöge der Construction, qa parallel mit NB ist; so verhält sich

Sa : aq = SB : NB (§. 146.)

Sa : SB = qa : NB (§. 100. Ar.)
Sa : SB = 1 : 10 vermöge der Constr.

---

qa : NB = 1 : 10 (§. 11. Ar.)

Auf eben die Art ist auch klar, daß rb 2 Zoll vorstellt, wenn NB 1 Schuh, d. i. 10 Zoll bedeutet, oder, welches eben so viel sagen will, daß sich verhält

rb : NB = 2 : 10.

Denn weil auch rb mit NB parallel gezogen worden; so ist der Triangel Srb dem Triangel SNB ähnlich, (§. 146.) und daher

Sb : rb = SB : NB

Sb : SB = rb : NB (§. 100. Ar.)
Sb : SB = 2 : 10 vermöge der Constr.

---

rb : NB = 2 : 10 (§. 11. Ar.)

Wollte man den verjüngten Maasstab nach einer andern Eintheilung der Ruthen, Schuhe u. s. f. einrichten, z. E. nach dem sogenannten Duodecimalmaasse, nach welchem die Ruthe in 12 Schuhe, der Schuh in 12 Zoll u. s. f. getheilt wird; so müßte man auf die Linien AB und AP nicht 10, sondern 12 gleiche Theile tragen, wie ein jeder leicht von selbst einsehen wird.

§. 169.

§. 169.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Oerter zu messen, zu denen beyden man aus einem gewissen Orte in gerader Linie gehen kann.

Erste Auflösung.

Es sey (Fig. 80. Tab. 7.) die Entfernung der beyden Oerter B und G, und folglich die gerade Linie BG zu messen, die sich wegen des darzwischen liegenden Teichs nicht unmittelbar messen läßt, zu deren beyden Endpuncten B und G aber man aus dem angenommenen Orte C in gerader Linie kommen kann. Man stecke erstlich in den angenommenen Ort C einen Stab, messe alsdenn die Linie CB und trage sie zurück gegen Q in eben der Richtung, so daß nicht nur CQ = CB, sondern daß auch CQ und CB in einer geraden Linie liegen, und bemerke den Punct Q durch einen Stab. Auf eben diese Art messe man auch CG und trage diese Linie gegen A zurück, so daß CA = CG und beyde Linien nach einerley Richtung liegen. Wird nun in A auch ein Stab gesteckt, und die Entfernung dieses Stabes von dem Stabe Q gemessen; so weiß man die Entfernung BG, weil AQ so groß als BG seyn muß.

Beweis.

In den Triangeln BCG und CAQ, welche man sich hier gedenken kann, ist

$$\left.\begin{array}{rcl} CQ & = & CB \\ CA & = & CG \end{array}\right) \text{ vermöge der Construction.}$$

$$u = o \quad (\S.\ 58.)$$

$$AQ = BG \quad (\S.\ 37.)$$

Oft

Oft erlaubet es der Platz nicht, daß man die ganzen Linien CB und CG zurück tragen kann; in diesem Falle braucht man nur einen Theil dieser Linien, z. E. die Hälfte zu nehmen. Ist nun CN die Hälfte von CB, und CF die Hälfte von CG, so ist auch die Linie FN nur die Hälfte von der zu messenden Weite BG. Mißt man also FN, und nimmt diese Linie zweymal, so weiß man BG. Der Grund davon ist folgender. Weil

$$\left.\begin{array}{l} CN : CB = 1 : 2 \\ CF : CG = 1 : 2 \end{array}\right) \text{ vermöge der Construction.}$$

Folglich $CN : CB = CF : CG$ (§. 11. Ar.)

und altern. $CN : CF = CB : CG$ (§. 100. Ar.)

$u = o$ (§. 58.)

$$\left.\begin{array}{l} \triangle\ CFN \backsim \triangle\ CBG \\ CF : FN = CG : BG \end{array}\right) \text{ (§. 147.)}$$

alternando $CF : CG = FN : BG$ (§. 100. Ar.)

$CF : CG = 1 : 2$

$FN : BG = 1 : 2$ (§. 11. Ar.)

Wäre CF der dritte Theil von CG, und CN der dritte Theil von CB; so würde auch FN nur der dritte Theil von BG seyn, wie man aus dem vorigen Beweise leicht einsehen wird.

Andere Auflösung.

Hat man, ausser einer Meßkette und einigen Stäben, welche zur vorigen Auflösung nur nöthig sind, auch einen Winkelmesser oder ein Meßtisch-

chen, welches nichts anders ist, als ein Reißbret, auf einem beweglichen Fusse, wobey man sich eines Linials mit Dioptern bedient; so läßt sich die vorige Aufgabe noch bequemer auflösen. Nämlich man messe mit dem Winkelmesser den Winkel o, und mit der Meßkette die Linien CB und CG auf dem Felde. Alsdenn trage man durch Hülfe des Transporteurs den Winkel o auf das Papier, und mache c = o. Auf die Schenkel des Winkels c trage man durch Hülfe des verjüngten Maasstabes die Linien CB und CG, so daß cb und cg eben so viel Theile nach dem verjüngten Maasstabe enthalten, als CB und CG nach dem eigentlichen Maaße haben. Wird nun auf dem Papiere die Linie bg gezogen, und nach dem verjüngten Maasstabe gemessen, so muß dieselbe eben so viel verjüngte Ruthen und Schuhe enthalten, als die zu messende Weite BG wirkliche Ruthen und Schuhe enthält. Denn weil bc und cg nach dem verjüngten Maaße eben so viel Theile haben, als CB und CG nach dem wirklichen Maaße, so verhält sich

cb : cg = CB : CG

c = o vermöge der Construction.

$\left.\begin{array}{l} \triangle\ cbg \sim \triangle\ CBG \\ cb : bg = CB : BG \end{array}\right)$ (§. 147.)

---

cb : CB = bg : BG (§. 100. Arithm.

Vermöge der Construction aber verhält sich cb zu CB so, daß cb nach dem verjüngten Maaße eben so viel Theile hat, als CB nach dem grossen Maaße. Folglich muß auch bg nach dem verjüngten Maasstabe

stabe so viel Ruthen enthalten, als BG nach dem eigentlichen Maaße.

Mit dem Meßtischchen kann man diese Aufgabe noch geschwinder auflösen, und dabey den Transporteur entbehren. Denn man setze das Tischchen über den Punct C, richte das Dioptern-Linial erstlich nach dem Orte B, und alsdenn nach dem Orte G, und ziehe jedesmal eine gerade Linie; so erhält man auf dem Tischchen einen Winkel, welcher so groß ist, als der Winkel o. auf dem Felde, weil er ihn decket. Trägt man nun, wie vorhin, auf die Schenkel dieses Winkels, nach dem verjüngten Maasstabe die gemessenen Linien CB und CG, so erhält man auf dem Tischchen einen Triangel, wie cbg, welcher dem Triangel CBG auf dem Felde ähnlich ist. Die Seite, welche dem Winkel o gegenüber steht, muß also, wie aus vorigem Beweise erhellt, die verlangte Weite vorstellen.

§. 170.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Orte zu messen, zu deren einem man nur in gerader Linie kommen kann.

Erste Auflösung.

Es sey (Fig. 81. Tab. 7.) die Entfernung der beyden Häuser A und B, zwischen welchen sich ein Fluß befindet, zu messen, und es sey nur möglich, an das Haus A in gerader Linie zu gehen.

Muß man diese Messung mit bloßen Stäben und einer Meßkette verrichten; so erwähle man sich

einen Punct, z. E. N, von welchem sich gegen A eine gerade Linie unmittelbar messen läßt, und bezeichne denselben durch einen Stab. Hat man diese Linie NA gemessen, so trage man dieselbe nach eben der Richtung zurück, so daß NR = NA, und beyde eine einzige gerade Linie AR ausmachen. Den Winkel A trage man durch Hülfe der Meßkette oder einer Schnur an den Punct R, aber nach entgegengesetzter Richtung, so daß $< R = < A$ (§. 167.). In dem Schenkel dieses Winkels QR gehe man alsdenn mit einem Stabe so lange fort, bis man denselben mit N und B in einer geraden Linie erblicket. Ist nun der Stab Q mit N und B in eine gerade Linie gesetzt worden, so darf man nur die Linie QR messen, um die verlangte Weite AB zu wissen, weil QR = AB.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{rcl} NR & = & NA \\ < R & = & < A \\ y & = & x \end{array}\right) \text{ vermöge der Constr.}$$
(§. 58.)

Folglich QR = AB (§. 39.)

Man kann auch hier dasjenige beobachten, was bey der vorigen Aufgabe erinnert worden ist, daß man nämlich nicht allemal die ganze Linie NA zurücktragen darf. Nur dieses muß man nicht vergessen, daß alsdenn, wenn man nur einen Theil von NA nimmt, kein gleicher, sondern nur ein ähnlicher Triangel entstehet. QR ist in diesem Falle ein eben so grosser Theil von AB, als es NR von NA ist. Wäre also z. E. NR nur der zehnte Theil von NA, so würde auch QR nur der zehnte Theil von der verlangten Weite AB seyn.

An-

Andere Auflösung.

Man messe mit einem Winkelmesser die Winkel x und A, und mit der Meßkette die Linie NA. Hierauf trage man auf das Papier eine Linie na, die nach dem verjüngten Maasstabe so viel Theile enthält, als NA nach dem eigentlichen Maaße. An die Endpuncte dieser Linie trage man durch Hülfe des Transporteurs die beyden Winkel x und a, so daß $n = x$ und $a = A$ gemacht wird. Die Schenkel der Winkel n und a verlängere man, bis sie einander durchschneiden; so muß der Triangel anb auf dem Papiere dem Triangel ANB auf dem Felde ähnlich seyn. Mißt man nun die Seite ab nach dem verjüngten Maasstabe; so erfährt man, wie viel Ruthen, Schuh u. s. f. die gesuchte Weite AB enthält.

Beweis.

$\left.\begin{array}{l} n = x \\ a = A \end{array}\right)$ vermöge der Construction.

$\left.\begin{array}{l} \triangle\ anb \sim \triangle\ ANB \\ an : ab = AN : AB \end{array}\right)$ (S. 145.)

$an : AN = ab : AB$ (S. 100. Ar.)

Da sich nun an zu AN, vermöge der Construction, so verhält, daß an nach dem verjüngten Maasstabe so groß ist, als AN nach dem grossen Maaße, so ist klar, daß auch ab so viel verjüngte Ruthen und Schuhe enthalten muß, als AB ordentliche Ruthen und Schuhe enthält.

Eben diesen ähnlichen Triangel anb bekömmt man auch durch das Meßtischchen, wenn man dassel-

be erstlich über den Punct N setzt, und den Winkel x aufnimmt; den Schenkel dieses Winkels, welcher über NA stehet, nach dem verjüngten Maasstabe so groß macht, als NA nach dem eigentlichen Maaße ist; alsdenn das Tischchen in die Gegend A trägt, und dasselbe so stellt, daß der Punct a über A, und die Linie an über AN stehet. Wird nun das Dioptern-Linial nach B gerichtet, und eine gerade Linie auf dem Tischchen gezogen, so muß der Winkel a auf dem Tischchen dem Winkel A auf dem Felde gleich, und überhaupt der Triangel anb auf dem Tischchen dem Triangel ANB auf dem Felde, nach dem vorigen Beweise, ähnlich seyn.

§. 171.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Oerter zu messen, zu deren keinem man von dem Orte, wo man sich befindet, in gerader Linie gehen kann.

Auflösung.

Es sey (Fig. 82. Tab. 8.) die Entfernung zweyer Bäume C und B jenseit eines Flusses zu bestimmen. Man erwähle sich zwey Standpuncte A und G, deren Entfernung sich unmittelbar messen läßt, und aus denen beyden man sowohl den Baum C als auch den Baum B und den andern Standort sehen kann. Beyde Standörter bezeichne man durch Stäbe, und stelle sich zwischen denselben und den beyden Oertern C und B die geraden Linien AG, AB, AC, GC und GB vor. Nun messe man mit dem Winkelmesser sowohl die Winkel o und x, als auch die Winkel e und u, ingleichen mit der Meßkette die Entfernung der beyden angenommenen Standpuncte

A und G. Durch Hülfe des verjüngten Maasstabes trage man die Linie AG auf das Papier, so daß man der Linie ag so viel verjüngte Ruthen giebt, als AG ordentliche Ruthen enthält. An den Punct a setze man durch Hülfe des Transporteurs die Winkel o und x, an den Punct g aber die Winkel e und u in eben der Ordnung, wie sie sich auf dem Felde befinden. Die Schenkel ac und gc, ferner die Schenkel ab und gb verlängere man so weit, bis sie einander durchschneiden; so müssen die beyden Durchschnittspuncte c und b nach dem verjüngten Maaßstabe eben die Entfernung, als die beyden Bäume C und B nach dem grossen Maaße haben.

Beweis.

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle \text{ cag} = \sphericalangle \text{ CAG} \\ \sphericalangle \text{ cga} = \sphericalangle \text{ CGA} \end{array}\right\}$ vermöge der Constr.

ag : ac = AG : AC (§. 145.)

ag : AG = ac : AC (§. 100. Ar.)

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle \text{ bag} = \sphericalangle \text{ BAG} \\ \sphericalangle \text{ bag} = \sphericalangle \text{ BGA} \end{array}\right\}$ vermöge der Constr.

ag : ab = AG : BA (§. 145.)

ag : AG = ab : AB (§. 100. Ar.)

ag : AG = ac : AC nach dem vorigen Beweise.

ab : AB = ac : AC (§. 11. Ar.)

ab : ac = AB : AC (§. 100. Ar.)

$\sphericalangle$ cab = $\sphericalangle$ CAB vermöge der Constr.

$\triangle$ cab $\sim$ $\triangle$ CAB (§. 147.)

d. i. ac : cb = AC : CB

ac : AC = cb : CB (§. 100. Arithm.)

ag : AG = ac : AC wie oben erwiesen wurde.

ag : AG = cb : CB

Da nun ag nach dem verjüngten Maasstabe so groß gemacht worden ist, als AG nach dem wahren Maasse; so muß auch, vermöge der Proportion, cb nach dem verjüngten Maasstabe so viel Ruthen enthalten, als die Linie CB auf dem Felde nach dem eigentlichen Maaße enthält.

Wer das vorige verstanden hat, der wird leicht einsehen, wie man die gegenwärtige Aufgabe auch durch Hülfe des Meßtischchens auflösen könne.

Hätte man weder Winkelmesser noch Meßtischchen, so müßte man sich die Figur cbga an einem bequemen Orte auf dem Felde entwerfen, indem man die Winkel o, x, e und u durch Hülfe einer Schnur oder Kette abtrüge (§. 167.). Machte man nun ag = AG, so würde auch cb = CB seyn. Wäre ag nur ein Theil, z. E. die Hälfte von AG, so würde auch cb nur die Hälfte von CB seyn, wie aus dem vorigen Beweise erhellt.

§. 172.

Aufgabe. Eine Höhe zu messen, zu der man in gerader Linie kommen kann, und mit welcher man sich auf einerley Ebene befindet.

Erste Auflösung.

Es sey (Fig. 84. Tab. 9.) die Höhe AM, d. h. die senkrechte Linie zu finden, die sich von der Spitze A auf den Boden ziehen läßt. Man erwähle sich einen bequemen Standort, z. E. C, aus welchem sich eine gerade Linie gegen den Fuß der Höhe messen läßt. Zwischen diesem Puncte C und den Endpuncten der Höhe A und M stelle man sich die Linien

CA

CA und CM vor, messe den Winkel, welchen diese beyden Linien mit einander machen, mit dem Winkelmesser, und die Linie CM mit der Meßkette. Hierauf ziehe man auf dem Papiere eine Linie mc, welche nach dem verjüngten Maasstabe so groß ist, als CM nach dem wahren Maaße; trage den Winkel C durch Hülfe des Transporteurs an den Punct c, errichte in m eine senkrechte Linie, und verlängere dieselbe, bis sie den andern Schenkel des Winkels c schneidet; alsdenn messe man diese Linie am nach dem verjüngten Maasstabe, so sieht man daraus, wie groß die Höhe AM nach dem eigentlichen Maaße ist.

Beweis.

Weil sowohl der Winkel m, als auch der Winkel M ein rechter Winkel, und c = C vermöge der Construction ist; so müssen die beyden Triangel amc und AMC einander ähnlich seyn, und folglich

mc : am = MC : AM (§. 145.)

---

mc : MC = am : AM (§. 100. Ar.)

Da nun, vermöge der Construction, mc nach dem verjüngten Maaße so viel Theile hat, als MC nach dem grossen Maaße; so muß auch am nach dem verjüngten Maasstabe so groß seyn, als AM nach dem ordentlichen Maaße.

Weil man die Instrumente, womit man die Winkel mißt, nicht unmittelbar auf die Erde leget, sondern auf ein Stativ setzet; so muß man allemal zu der gefundenen Höhe noch die Höhe des Stativs addiren.

Andere Auflösung.

Ohne Winkelmesser läßt sich diese Aufgabe auch durch blosse Stäbe folgendergestalt auflösen. Man stecke einen Stab BG senkrecht in die Erde. Hinter diesen Stab lege man sich auf den Rücken, und bewege sich so lange hin und her, bis man die Spitze des Stabes B mit der Spitze der zu messenden Höhe A in einer geraden Linie erblicket. Den Punct C, wo sich das Auge befunden, mit welchem man gegen die Spitzen B und A in gerader Linie gesehen, bemerke man mit einem Stabe, messe die Entfernung des Auges von dem Stabe, ferner die Länge desjenigen Theils des eingesteckten Stabes, welcher über der Erde steht, und die Entfernung des Auges von der Höhe. Nunmehr schliesse man folgendergestalt: wie sich verhält die Entfernung des Stabes von dem Auge, zu der Länge des Stabes, so verhält sich auch die Entfernung des Auges von der Höhe, zu der Höhe selbst. Z. E. es sey die Entfernuug des Stabes von dem Auge, nämlich CG = 12′, die Höhe BG = 8′, die Entfernung der Auges von der Höhe CM = 240′; so findet man die Höhe AM, durch Hülfe der Regel Detri, auf folgende Art:

CG : BG = CM : AM

d. i. 12′ : 8′ = 240′ : AM

12) 1 — 20 — 8

160′ = AM

Beweis.

Weil bey M und bey G rechte Winkel sind, indem der Stab BG senkrecht in die Erde gesteckt wird, und

und der Winkel C den beyden Triangeln BGC und AMC gemein ist; so müssen diese Triangel einander ähnlich seyn. Es verhält sich daher

GC : BC = CM : AM (§. 145.)

Dritte Auflösung.

Aus der Länge des Schattens eines Körpers läßt sich ebenfalls seine Höhe bestimmen, wenn man zugleich die Länge des Schattens mißt, den ein senkrecht eingesteckter Stab zu eben der Zeit von sich wirft, und dieselbe mit der Länge des Stabes vergleichet. Z. E. es sey (Fig. 84. Tab. 9.) der senkrechte Stab am = 8′, die Länge seines Schattens mc = 10′, und die Länge von dem Schatten des Thurms MC = 200′; so schliesse man: wie sich verhält der Schatten des Stabes zu der Länge des Stabes, so verhält sich der Schatten des Thurms zu der Höhe des Thurms.

mc : am = MC : AM

d. i. 10′ : 8′ = 200′ : AM

8

10) 1600 (160′ = AM

Der Beweis ist mit dem vorigen völlig einerley. Denn die Winkel C und c sind einander gleich, wenn man die Grenzen der beyden Schatten in einem Augenblicke bemerket, ehe die Sonne ihre Höhe über dem Horizonte, wovon die Grösse dieser Winkel abhängt, verändert, und die Winkel bey m und M rechte Winkel; folglich △ amc ∽ △ AMC (§. 145.), und daher

mc : am = MC : AM

§. 173.

Aufgabe. Eine Höhe zu messen, mit welcher man sich auf einer Ebene befindet, zu der man aber nicht in gerader Linie gehen kann.

Auflösung.

Es sey (Fig. 83. Tab. 8.) die Höhe eines Thurms PN zu messen, an welchen man wegen eines darum gehenden Grabens nicht kommen kann. Um dieses zu bewerkstelligen, erwähle man sich also erstlich zwey Standörter A und B, deren Entfernung sich unmittelbar messen läßt, und stelle sich von denselben gerade Linien gegen die Spitze P vor. Hierauf messe man mit dem Winkelmesser die Winkel x und B, welche durch diese Linien entstehen, und mit der Meßkette die Entfernung der Standörter AB. Ferner trage man auf das Papier eine Linie ab, die nach dem verjüngen Maasstabe so groß ist, als AB nach dem ordentlichen Maaße. An die Endpuncte dieser Linie a und b setze man die Winkel x und B, so daß $< pan = < PAN$ und $b = B$ wird. Die Schenkel dieser Winkel verlängere man, bis sie zusammenstossen, und aus dem Puncte p, wo sie zusammenkommen, ziehe man auf die verlängerte Linie ab die senkrechte Linie pn, so muß dieselbe nach dem verjüngten Maaße eben so groß seyn, als die zu messende Höhe PN nach dem wahren Maaße ist.

Beweis.

Weil vermöge der Construction in dem Triangel pab zwey Winkel von eben der Grösse sind, als

in

in dem Triangel PAB, so müssen die beyden Triangel einander ähnlich seyn, und

ab : ap = AB : AP (§. 145.)

---

altern. ab : AB = ap : AP (§. 100.) Ar.)

Aus eben dem Grunde ist auch der Triangel pna dem Triangel PNA ähnlich. Denn pn ist senkrecht auf nb gezogen worden, und PN stellt die Höhe des Thurms vor, und ist daher senkrecht auf NB, woraus die Gleichheit der Winkel pna und PNA erhellt. Da nun über dieses auch der Winkel pan so groß gemacht worden ist, als der Winkel PAN oder x; so verhält sich

ap : pn = AP : PN (§. 145.)

---

ap : AP = pn : PN (§. 100. Ar.)
ab : AB = ap : AP nach dem vorigen Beweise.

---

pn : PN = ab : AB (§. 11. Ar.)

Es verhält sich aber, vermöge der Construction, ab zu AB so, daß ab nach dem verjüngten Maaße so groß ist, als AB nach dem wahren Maaße; folglich muß auch pn nach dem verjüngten Maasstabe so viel Theile enthalten, als PN nach dem ordentlichen Maaße enthält.

Was §. 172 erinnert wurde, ist auch hier in Acht zu nehmen, daß man nämlich jederzeit zu der gefundenen Höhe noch die Höhe des Stativs, auf welches man den Winkelmesser gesetzt hat, addiren muß. Die Höhe des Stativs hängt zwar von unsrer

frer Willkühr und Bequemlichkeit ab; allein demohngeachtet kann sie in dem Puncte A nicht anders angenommen werden, als in dem Puncte B, wenn man sich nicht der Gefahr zu fehlen aussetzen will. Denn gesetzt man hätte an dem einen Orte das Stativ um einen Schuh höher oder niedriger gestellt, als an dem andern Standorte; so würden nunmehr die Puncte N, A, B, nicht mehr in eine gerade Linie fallen, welches doch bey dem Beweise vorausgesetzt wird.

§. 174.

Aufgabe. Ein jedes Feld oder einen andern Platz, in welchem man überall nach geraden Linien gehen kann, in Grund zu legen.

Erste Auflösung.

Die Figur DFABC (Fig. 85. Tab. 9.) stelle das gegebene Feld vor. Da man durch Diagonallinien, welche einander nicht durchschneiden, jede geradelinichte Figur in so viel Triangel zergliedern kann, als dieselbe Seiten hat, weniger zwey; so braucht man nur solche Diagonalen, wie FC und AC, nebst den Seiten der Figur zu messen, um alle Seiten der Triangel FDC, FCA und ACB zu wissen. Wird nun durch Hülfe des verjüngten Maasstabes aus den gemessenen Linien FD, DC und FC der Triangel fdc auf das Papier getragen; so muß derselbe dem Triangel FDC auf dem Felde ähnlich seyn (§. 148.). Macht man ferner auf eben diese Art den Triangel fac durch Hülfe des verjüngten Maasstabes aus den Seiten des Triangels FAC, und den

Tri=

Triangel abc aus den Seiten des Triangels ABC, und setzt die Triangel auf dem Papiere in eben der Ordnung zusammen, in welcher sie sich auf dem Felde befinden, so muß die Figur dfabc auf dem Papiere, der Figur DFABC auf dem Felde ähnlich seyn; weil sie beyde aus ähnlichen Theilen bestehen, die nach einerley Ordnung mit einander verbunden sind. Zu dieser Auflösung also, wodurch man ein Feld weit genauer, als durch Hülfe gemeiner Winkelmesser, in Grund legen kann, hat man nichts weiter, als eine Meßkette und Stäbe nöthig.

Andere Auflösung.

Durch Hülfe eines Meßtischchens läßt sich ein Feld, in welches man kommen kann, auch folgendergestalt sehr leicht in Grund legen. Man erwähle in einer mittlern Gegend einen gewissen Punct, z. E. den Punct C, (Fig. 86. Tab. 9.) und setze das Tischchen über denselben. Nun visire man mit dem Dioptrnliniale, ohne das Tischchen zu verrücken, nach allen Ecken des Feldes M, N, Q u. s. f. die man sich durch Stäbe zu bemerken pflegt, und ziehe aus dem Puncte, welcher sich auf dem Tischchen senkrecht über dem Puncte C befindet, die geraden Linien FC, BC, GC u. s. w. wodurch man die Winkel MCN, NCQ, QCR u. s. w. erhält. Hierauf messe man mit der Meßkette die Linien CM, CN, CQ, CR und CP. Auf die Schenkel der Winkel MCN, NCQ, QCR u. s. f. trage man nach dem verjüngten Maasstabe die Linien CM, CN, CQ u. s. f. so daß CF, CB, CG, CA, CS nach dem verjüngten Maaße so groß sind, als CM, CN, CQ, CR, CP nach dem wahren Maaße. Alsdenn ziehe man die Puncte F, B, G, A und S

durch

durch gerade Linien zusammen, so muß die Figur FBGAS auf dem Papiere der Figur MNQRP auf dem Felde ähnlich seyn. Denn der Triangel FCB ist dem Triangel MCN ähnlich; weil, vermöge der Construction,

$$CF : CB = CM : CN$$

und $\sphericalangle FCP = \sphericalangle MCN$ (§. 147.)

Aus eben dem Grunde ist auch der Triangel BCG dem Triangel NCQ, der Triangel GCA dem Triangel QCR: der Triangel ACS dem Triangel RCP; und der Triangel CSF dem Triangel CPM ähnlich. Folglich

$$\sphericalangle FBC = \sphericalangle MNC$$
$$\sphericalangle CBG = \sphericalangle CNQ$$

$$\sphericalangle FBC + \sphericalangle CBG = \sphericalangle MNC + \sphericalangle CNQ$$

d. i $\sphericalangle FBG = \sphericalangle MNQ$ (§. 13. Ar.)

und so folgt auf eben die Art aus der Aehnlichkeit der übrigen Triangel, daß auch

$$\sphericalangle BGA = \sphericalangle NQR$$
$$\sphericalangle GAS = \sphericalangle QRP$$
$$\sphericalangle ASF = \sphericalangle RPM$$
$$\sphericalangle SFB = \sphericalangle PMN$$

Ferner müssen auch, weil, wie vorhin gezeigt wurde, $\triangle FCB \sim \triangle MCN$ und $\triangle CBG \sim \triangle CNQ$, folgende Proportionen hier statt finden:

$$\left.\begin{array}{lllll} CB & : & CN & = & FB : MN \\ CB & : & CN & = & BG : NQ \end{array}\right) \text{(§. 147.)}$$

$$FB \cdot MN = BG : NQ \quad \text{(§. 11. Ar.)}$$

$$FB : BG = MN : NQ \quad \text{(§. 100. Ar.)}$$

und aus eben der Ursache

$$\begin{array}{lllll} BG & : & GA & = & NQ : QR \\ GA & : & AS & = & QR : RP \\ AS & : & SF & = & RP : PM \end{array}$$

woraus die Aehnlichkeit der beyden Figuren SFBGA und PMNQR erhellet. (§. 141.)

Dritte Auflösung.

Mißt man mit dem Winkelmesser diejenigen Winkel, welche sich um den Punct C befinden, trägt dieselben durch Hülfe des Transporteurs auf das Papier in eben der Ordnung, so daß

$$\begin{array}{lll} \sphericalangle\ mcn & = & \sphericalangle\ MCN \\ \sphericalangle\ ncq & = & \sphericalangle\ NCQ \\ \sphericalangle\ qcr & = & \sphericalangle\ QCR \text{ u. s. f.} \end{array}$$

und macht, wie vorhin, die Linien cm, cn, cq, cr, cp nach dem verjüngten Maasstabe so groß, als CM, CN, CQ, CR, CP nach dem wahren Maaße sind; so muß die Figur mnqrp auf dem Papiere ebenfalls der Figur MNQRP auf dem Felde ähnlich seyn. Der Beweis von dieser Auflösung ist mit dem vorigen völlig einerley.

§. 175.

Aufgabe. Ein Feld oder einen andern Platz, in welchen man nicht kommen kann, in Grund zu legen.

Erste Auflösung.

Wenn man um das gegebene Feld herum gehen kann, so darf man nur die Seiten und Winkel messen, hernach durch Hülfe des verjüngten Maasstabes und des Transporteurs daraus eine Figur verzeichnen, welche der Figur auf dem Felde ähnlich seyn muß. Denn hat (Fig. 85.) fa, ab, bc u. s. w. nach dem verjüngten Maasstabe so viel Theile, als FA, AB, BC u. s. f. nach dem grossen Maaße, und ist

$$\angle fab = FAB$$
$$\angle abc = ABC$$
$$\angle bcd = BCD \text{ \&c.}$$

so ist die Figur dfabc auf dem Papiere der Figur DFABC auf dem Felde ähnlich (§. 141.).

Andere Auflösung.

Wenn man nicht um den ganzen Platz herum gehen kann, so erwähle man sich zwey Oerter, z. E. M und P, (Fig. 87. Tab. 9.) deren Entfernung sich unmittelbar messen läßt, und aus denen beyden man alle Ecken der Figur, die man durch Stäbe bezeichnen

nen muß, sehen kann. Von diesen beyden Puncten stelle man sich gerade Linien gegen alle Ecken des Feldes vor, und messe mit dem Winkelmesser die Winkel o, u, e, x, y und r, welche diese Linien mit einander machen. Hierauf messe man die Linie MP, ziehe auf dem Papiere eine Linie mp, welche nach dem verjüngten Maasstabe so groß ist, als MP nach dem wahren Maaße, trage an den einen Endpunct derselben m mit dem Transporteur die Winkel o, u, e, und an den andern Endpunct p die Winkel x, y, r, in eben der Ordnung, wie sie sich auf dem Felde befinden; verlängere die Schenkel derselben bis sie einander durchschneiden, und ziehe aus dem Durchschnittspuncten a, d und f die geraden Linien am, ad, df, fp; so muß die Figur ampfd auf dem Papiere, welche dadurch entsteht, der Figur AMPFD auf dem Felde ähnlich seyn. Denn

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle \text{amp} = \sphericalangle \text{AMP} \\ \sphericalangle \text{apm} = \sphericalangle \text{APM} \end{array}\right) \text{ vermöge der Constr.}$$

$\triangle$ map $\sim$ $\triangle$ MAP (§. 145.)

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle \text{dmp} = \sphericalangle \text{DMP} \\ \sphericalangle \text{mpd} = \sphericalangle \text{MPD} \end{array}\right) \text{ vermöge der Constr.}$$

$\triangle$ mdp $\sim$ $\triangle$ MDP (§. 145.)

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle \text{fmp} = \sphericalangle \text{FMP} \\ \sphericalangle \text{fpm} = \sphericalangle \text{FPM} \end{array}\right) \text{ vermöge der Constr.}$$

$\triangle$ mfp $\sim$ $\triangle$ MFP (§. 145.)

Weil nun △ amp ∽ △ APM, so folgt, daß

mp : ma = MP : MA (§. 145.)
oder mp : MP = ma : MA (§. 100. Ar.)

Ferner weil △ mfp ∽ △ MFP

---

mp : pf = MP : PF (§. 145.)
oder mp : MP = pf : PF (§. 100. Ar.)

und weil △ mdp ∽ △ MDP

---

mp : md = MP : MD (§. 141.)

---

mp : MP = md : MD (§. 100. Ar)
mp : MP = ma : MA wie oben erwiesen wurde.

---

ma : MA = md : MD (§. 11. Ar.)

---

ma : md = MA : MD (§. 100. Ar.)
< amd = < AMD vermöge der Constr.

△ amd ∽ < AMD (§. 147.)
am : ad = AM : AD
< mad = < MAD
< adm = < ADM

Auf eben die Art läßt sich auch zeigen, daß die Seiten df und fp sich wie die Seiten DF und FP verhalten. Denn aus der Aehnlichkeit der beyden Triangel mdp und MDP folgt diese Proportion:

mp

mp : pd = MP : PD (§. 141.)

---

mp : MP = pd : PD (§. 100. Ar.)

mp : MP = fp : FP nach dem vorherg. Beweise.

---

pd : PD = fp : FP (§. 11. Ar.)

---

pd : fp = PD : FP (§. 100. Ar.)

< dpf = < DPF vermöge der Constr.

△ dpf ∽ △ DPF (§. 147.)

d. i. df : fp = DF : FP

und < pdf = < PDF

< mdp = < MDP weil △ mdp ∽ △ MDP

< adm = < ADM wie oben erwiesen wurde.

< pdf + < mdp + < adm = < PDF + < MDP + < ADM (§. 13. Ar.)

d. i < adf = < ADF (§. 10. Ar.)

Da nun alle Winkel der Figur ampfd den Winkeln in der Figur AMPFD gleich sind, und die Seiten der ersten sich eben so verhalten, wie die Seiten der andern, so ist die Aehnlichkeit derselben richtig erwiesen (§. 141.).

§. 176.

Wenn man den Inhalt eines Feldes oder andern Platzes ausrechnen soll, so darf man nur dasselbe in Grund legen, die Figur auf dem Papiere durch Diagonallinien in Triangel zergliedern, von einem jeden Triangel die Grundlinie und Höhe nach demjenigen verjüngten Maasstabe messen, nach welchem

man die Figur verzeichnet hat, hierauf den Inhalt aller Triangel berechnen und zusammen addiren, so muß die Summe dieser Triangel den Inhalt des ganzen Feldes anzeigen (§. 134.).

Sechstes Capitel.

Von den Körpern.

§. 177.

Der körperliche Raum, der durch zwey gleiche und ähnliche Figuren, die einander parallel liegen, und durch eben so viel Parallelogramme, als eine solche Figur Seiten hat, begrenzt wird, heißt ein **Prisma**; welches also entstehen würde, wenn sich eine ebene Fläche, wie der Triangel FNQ, (Fig. 88. Tab. 10.) an einer geraden Linie parallel herunter bewegte. Die gleichen und ähnlichen Figuren, wie △ FNQ und △ EMS, werden die **Grundflächen**, und die Parallelogramme, wie EFNM, MNQS und EFQS, welche die übrigen Grenzen desselben ausmachen, die **Seitenflächen** genannt. Hat eine Grundfläche drey Seiten, so heißt das Prisma ein **dreyeckichtes**; hat sie vier Seiten, ein **viereckichtes** Prisma u. s. w. Stehen die Seitenflächen senkrecht auf den Grundflächen, so wird auch das Prisma **senkrecht** oder **gerade** (prisma rectum) genannt; stehen sie aber schief auf denselben

ben, so heißt man es ein schiefes Prisma (prisma obliquum.).

§. 178.

Ein Parallelepipedum (Fig. 89.) ist nichts anders, als ein viereckichtes Prisma, dessen Grundflächen Parallelogrammen sind. Ein Parallelepipedum, dessen Grundflächen und Seitenflächen Quadrate sind, (Fig. 92.) wird ein Würfel oder Cubus genannt, welcher also in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen ist. Die Seite eines solchen Quadrates, z. E. CN oder CD heißt auch die Seite des Würfels.

§. 179.

Ein Prisma, dessen Grundflächen reguläre Vielecke von unendlich viel Seiten, d. i. Cirkel sind, erhält den Namen eines Cylinders, (Fig. 90. Tab. 10.) und die gerade Linie, welche die Mittelpuncte der Grundflächen verbindet, heißt die Axe des Cylinders. Steht die Axe senkrecht auf der Grundfläche, wie CN, so heißt der Cylinder ein aufrechter oder senkrechter, der also entsteht, wenn sich ein Rechteck, wie CDQN, um eine Seite, z. E. um CN bewegt. Macht aber die Axe, wie CG, (Fig. 91.) schiefe Winkel auf der Grundfläche, so wird auch der Cylinder ein schiefer genannt.

§. 180.

Durch die Höhe der jetzt erklärten Körper versteht man diejenige senkrechte Linie, die sich von der

einen Grundfläche auf die entgegengesetzte ziehen läßt. Bey den senkrechten Prismaten ist daher die Höhe einerley mit denjenigen Seiten der Seitenflächen, welche gegenüberstehende Ecken der Grundflächen verbinden; und bey senkrechten Cylindern kann die Axe zugleich die Höhe vorstellen. So könnte z. E. in dem dreyeckichten geraden Prisma NFQSME (Fig. 88.) die Seite FE, und in dem Cylinder BDQM (Fig. 90.) die Axe CN die Höhe bedeuten.

§. 181.

Wenn man die Erklärungen prismatischer Körper erwägt, so wird man leicht einsehen, daß jeder Schnitt in einem Prisma, welcher nach einer ebenen Fläche und parallel mit den Grundflächen geschieht, wie z. E. RCD (Fig. 88.) und FNQ (Fig. 89.), eine Figur geben muß, die den Grundflächen gleich und ähnlich ist. Und weil die Grundflächen der Cylinder Cirkel sind, so müssen lauter gleiche Cirkel entstehen, wenn man Cylinder parallel mit der Grundfläche durchschneidet.

§. 182.

Wollte man einen prismatischen Körper grösser oder kleiner machen, ohne daß er aufhörte ein Prisma zu seyn, so müßte man entweder seine Grundfläche, oder seine Höhe, oder beydes verändern; denn die Seitenflächen liessen sich nicht vergrössern oder verkleinern, ohne daß die Höhe oder die Grundflächen dadurch vergrössert oder verkleinert würden. Es ist also klar, daß die Grösse eines prismatischen Körpers durch seine Grundfläche und Höhe völlig bestimmt wird. Folglich sind alle Prismata und Cylin-

der

der einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben. Weil auch ein Dreyeck so groß, als ein Viereck, oder als ein Fünfeck u. s. f. seyn kann; so erhellt hieraus, daß auch ein dreyeckichtes Prisma einem viereckichten oder fünfeckichten Prisma u. s. f. gleich seyn muß, wenn die Grundfläche des dreyeckichten der Grundfläche des viereckichten oder fünfeckichten gleich und die Höhe in beyden einerley ist.

§. 183.

Wenn von einem Puncte, der sich ausserhalb einer geradelinichten Figur befindet, gerade Linien in die Spitzen der Winkel dieser Figur gezogen werden, so schliessen die Triangel, welche dadurch entstehen, mit dieser geradelinichten Figur einen körperlichen Raum ein, welchen man eine **Pyramide** nennt (Fig. 94. Tab. 10.). Die geradelinichte Figur z. E. DQN wird die **Grundfläche**, die Triangel, z. E. ADN, ANQ und ADQ, welche die übrigen Grenzen der Pyramide ausmachen, die **Seitenflächen**, der Punct A, wo diese Triangel zusammen kommen, die **Spitze**, und die senkrechte Linie, die sich von der Spitze auf die Grundfläche ziehen läßt, die **Höhe** der Pyramide genannt. Von der Anzahl der Seiten, welche die Grundfläche hat, pflegt man die verschiedenen Arten der Pyramiden zu benennen. Ist daher die Grundfläche ein Dreyeck, so heißt auch die Pyramide **dreyeckicht**, ist sie aber ein Viereck, ein Fünfeck, ein Sechseck u. s. f. so erhält auch die Pyramide den Namen einer **viereckichten**, **fünfeckichten** oder **sechseckichten** Pyramide.

§. 184.

Eine Pyramide, deren Grundfläche und Seitenflächen gleichseitige Triangel sind, heißt ein Tetraedrum. (Fig. 98. Tab. 11.)

§. 185.

Ist die Grundfläche ein reguläres Vieleck von unendlich viel Seiten, d. h. ein Cirkel, so wird die Pyramide ein Kegel (conus) genannt; die gerade Linie zwischen der Spitze des Kegels und dem Mittelpuncte der Grundfläche heißt seine Axe, welche entweder senkrecht, wie AC, (Fig. 95. Tab. 11.) oder schief, wie DC, (Fig. 96.) auf der Grundfläche stehet. Im ersten Falle pflegt man den Kegel gerade oder senkrecht, und im andern Falle schief zu nennen. Wird daher ein rechtwinklichter Triangel, wie ACG (Fig. 95. Tab. 11.), um eine senkrechte Seite, z. E. um AC beweget, so muß ein senkrechter Kegel entstehen.

§. 186.

Wird eine Pyramide durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche durchschnitten, so entsteht eine Figur, die der Grundfläche ähnlich ist. Denn es sey in der dreyeckichten Pyramide ADNQ (Fig. 94.) der Schnitt BCM parallel mit der Grundfläche DNQ, so muß auch CM mit NQ, ferner BC mit DN, und BM mit DQ parallel seyn. Folglich

$$\left.\begin{array}{l} AC : AN = CM : NQ \\ AC : AN = BC : DN \end{array}\right\} \text{(§. 146.)}$$

$$CM : NQ = BC : DN \text{ (§. 11. Ar.)}$$

$$CM : BC = NQ : DN \text{ (§. 100. Ar.)}$$

Aus

Aus eben dem Grunde

$$\left.\begin{array}{l} AB : AD = BC : DN \\ AB : AD = BM : DQ \end{array}\right\} \text{(§. 146.)}$$

$$BC : DN = BM : DQ \text{ (§. 11. Ar.)}$$

$$BC : BM = DN : DQ \text{ (§. 100. Ar.)}$$

Weil also die Seiten des Triangels BCM sich eben so verhalten, wie die Seiten des Triangels DNQ, so ist klar, daß der erstere Triangel, welcher durch den parallelen Schnitt entstanden, dem andern Triangel DNQ, d. i. der Grundfläche der Pyramide ähnlich ist (§. 148.). Was jetzt von dreyeckichten Pyramiden erwiesen worden ist, gilt auch von den vieleckichten, weil sich dieselben in dreyeckichte Pyramiden zergliedern lassen.

§. 187.

Wenn man also einen Kegel nach einer ebenen Fläche parallel mit der Grundfläche durchschneidet, so muß durch den Schnitt, z. E. DNE (Fig. 95.), ein Cirkel entstehen, welcher desto grösser seyn wird, je näher der Schnitt der Grundfläche des Kegels ist. Wäre also die Entfernung des Schnitts von der Grundfläche unendlich klein, so müste der Cirkel, welcher dadurch entstünde, von der Grundfläche unendlich wenig, d. i. gar nicht unterschieden seyn. Man kann sich daher einen Kegel als eine Summe von Cylindern vorstellen, deren Höhe unendlich klein ist.

§. 188.

§. 188.

Aus der Erklärung einer Pyramide und eines Kegels wird man leicht einsehen, daß die Grösse dieser Körper ebenfalls durch die Grösse ihrer Grundflächen und Höhen bestimmt wird. **Es müssen also alle Pyramiden, und daher auch alle Kegel die gleiche Grundflächen und Höhen haben, einander gleich seyn.**

§. 189.

Wenn sich (Fig. 93. Tab. 10.) ein halber Cirkel um den Diameter bewegt, bis er wieder in die erste Lage kömmt, ohne daß der Diameter seine Lage verändert, so entsteht eine **Kugel**. Die krumme Fläche, welche die Kugel begrenzt, heißt ihre **Oberfläche**; der Mittelpunct C des halben Cirkels, durch dessen Bewegung sie erzeugt wird, und welcher überall gleichweit von der Oberfläche der Kugel absteht, heißt auch der **Mittelpunct** der Kugel; jede gerade Linie, die von einem Puncte der Oberfläche in den entgegengesetzten durch den Mittelpunct der Kugel gezogen werden kann, z. E. AB, der **Diameter** oder **Durchmesser**, und die Hälfte davon, d. i. eine gerade Linie von der Oberfläche in den Mittelpunct, z. E. AC oder BC der **Radius** oder **Halbmesser der Kugel.**

§. 190.

Aus der Erklärung einer Kugel erhellt also, daß alle Halbmesser, und folglich auch alle Durchmesser von einer oder von zwey gleichen Kugeln einerley Grösse haben.

§. 191.

§. 191.

Wenn ein Körper durch lauter reguläre und gleiche Flächen begrenzt ist, und die körperlichen Winkel, welche durch die ebenen Winkel dieser Flächen entstehen, einander gleich sind, so wird derselbe ein **regulärer**, oder **ordentlicher Körper** genannt. Alle übrigen, wo nur eins von diesen Stücken fehlet, heissen **irregulär**, oder **unordentlich**. Von den prismatischen Körpern ist daher nur der Würfel, und von den pyramidalischen nur das Tetraëdrum regulär. Ausser diesen beyden aber, welche schon oben erklärt worden sind, giebt es noch drey reguläre Körper, nämlich das **Octaëdrum**, das **Icosaëdrum** und das **Dodecaëdrum**. Das **Octaëdrum** (Fig. 97. Tab. 11.) ist in acht gleichseitige Triangel, das **Icosaëdrum** (Fig. 100.) in zwanzig gleichseitige Triangel, und das **Dodecaëdrum** (Fig. 99.) in zwölf reguläre Fünfecke eingeschlossen.

§. 192.

Zum Ausmessen der Körper nimmt man in der Geometrie Würfel an, weil man sich durch dieselbe die unmittelbare Ausmessung am leichtesten vorstellen kann, und benennt dieselben von der Länge ihrer Seiten. Also ist eine **Cubikruthe** nichts anders, als ein Würfel, dessen Länge, Breite und Dicke eine Ruthe beträgt; ein **Cubikschuh**, ein Würfel, dessen jede Seite einen Schuh; ein **Cubikzoll**, ein Würfel, dessen Seite einen Zoll, und eine **Cubiklinie**, ein Würfel, dessen Seite eine Linie lang ist. Hieraus wird man auch leicht einsehen, was eine Cubikmeile, eine Cubikelle u. s. w. bedeutet. Man bezeich-

zeichnet aber diese Maaße wie die Längenmaaße, nur daß man zum Unterschiede entweder einen kleinen Würfel, oder den Buchstaben c rechter Hand oben an die Zahl setzet. So bedeuten z. E. folgende Zahlen 37^{c}, $432^{c'}$, $89^{c''}$, $6^{c'''}$, so viel als 37 Cubikruthen, 432 Cubikschuhe, 89 Cubikzolle und 6 Cubiklinien. Im gemeinen Leben aber pflegt man nicht allemal den körperlichen Raum durch Würfel auszumessen; denn so ist bekannt, daß man z. E. die Fässer nicht durch Cubikschuhe, u. s. f. sondern durch Kannen, welches cylindrische Gefäße sind, ausmißt.

§. 193.

Aufgabe. Ein senkrechtes Parallelepipedum auszumessen, dessen Grundfläche ein Rectangulum ist.

Auflösung.

Es sey das senkrechte Parallelepipedum CNAGRQD (Fig. 104. Tab. 12.) auszumessen, und DS sey die Seite desjenigen Würfels, welcher das Maas seyn soll. Man messe also nicht nur ein Paar an einander liegende Seiten der rechtwinklichten Grundfläche, z. E. NA und NC, sondern auch die Höhe ND durch die Seite DS des angenommenen Würfels; so muß das Product NA $\times$ NC $\times$ ND, d. i. weil NA $=$ 3, NC $=$ 4 und ND $=$ 6 ist, in diesem Falle $3 \times 4 \times 6 = 72$ diejenige Zahl seyn, aus welcher man sehen kann, wie vielmal das Parallelepipedum den zum Maas angenommenen Würfel, dessen Seite DS ist, enthalte.

Beweis.

Weil DS in NA dreymal, und in NC viermal enthalten ist, so sieht ein jeder leicht ein, daß man den angenommenen Würfel über die Grundfläche des Parallelepipedi 3 ✕ 4mal wird stellen können, und weil die Höhe ND sechsmal so groß ist, als die Seite des Würfels DS, so ist ferner klar, daß die Schicht von 3 ✕ 4 Würfeln 6mal in dem ganzen Parallelepipedo Raum haben, und folglich der Inhalt desselben 3 ✕ 4 ✕ 6 oder 72 Würfel seyn muß.

§. 194.

Weil NA ✕ NC den Inhalt der Grundfläche ausdrückt, indem dieselbe vermöge der Voraussetzung, ein Rechteck ist (§. 131.); so ist klar, daß in dergleichen Fällen das Product aus der Grundfläche in die Höhe den körperlichen Inhalt anzeigt.

§. 195.

Da ein Würfel nichts anders ist, als ein senkrechtes Parallelepipedum, dessen Grundflächen und Seitenflächen Quadrate sind (§. 178.); so muß der Inhalt desselben, d. i. ein Product aus seiner Grundfläche in die Höhe der Cubikzahl seiner Seite gleich seyn. Denn ist (Fig. 103. Tab. 12.) das Parallelepipedum QBADSMP ein Würfel, und daher BA = BQ = BP, so ist das Product, welches den Inhalt desselben ausdrückt, nämlich BA ✕ BQ ✕ BP = BA ✕ BA ✕ BA, d. i. BA^3. Man mißt daher einen gegebenen Würfel aus, wenn man untersucht, wie oft die Seite desjenigen Würfels, den man zum Maasstabe angenommen hat, in der Seite

des

des auszumessenden Würfels enthalten ist, und die Zahl, welche dieses anzeigt, zur dritten Dignität erhebet. Wäre z. E. PR die Seite desjenigen Würfels, wodurch der grössere Würfel QBADSMP ausgemessen werden sollte, und wäre PR in PM viermal enthalten, so würde der grössere Würfel den zum Maas angenommenen kleinern Würfel 4 × 4 × 4, d. i. 64mal in sich fassen. Findet man nun den Inhalt eines Würfels, wenn man die Seite desselben mißt und zur Cubikzahl erhebet, so ist klar, daß man umgewendet aus dem gegebenen Inhalte eines Würfels die Seite desselben finden muß, wenn man aus dem Inhalte die Cubikwurzel ziehet.

§. 196.

Hieraus wird man also leicht beurtheilen können, wie das vorhin angeführte körperliche Maas einzutheilen sey. Denn da eine Längenruthe, nach der geometrischen Eintheilung, 10 Längenschuh, ein Längenschuh 10 Längenzoll u. s. w. enthält; so muß eine Cubikruthe 10 × 10 × 10, d. i. 1000 Cubikschuh, und aus eben dem Grunde ein Cubikschuh 1000 Cubikzoll, und ein Cubikzoll 1000 Cubiklinien enthalten. Wollte man aber in dem Längenmaaße die Eintheilung von 12 zu 12 annehmen, und also durch einen Schuh den 12ten Theil einer Ruthe u. s. f. verstehen, so würde eine Cubikruthe 12 × 12 × 12, d. i. 1728 Cubikschuh, und ein Cubikschuh 1728 Cubikzoll, u. s. w. ausmachen.

§. 197.

Auch die übrigen Parallelepipeda, die keine Rechtecke zu Grundflächen haben, werden ausgemes-

sen,

sen, wenn man ihre Grundfläche ausrechnet, und in die Höhe multiplicirt; weil ein Parallelepipedum, dessen Grundfläche ein schiefwinklichtes Parallelogram ist, einem andern, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, gleich seyn muß, wofern nur die Grundfläche des ersten so groß, als die Grundfläche des andern, und die Höhe in beyden einerley ist (§. 182.).

§. 198.

Man theile ein Parallelepipedum, z. E. CBDMP (Fig. 105.) durch eine ebene Fläche dergestalt, daß der Schnitt nach den Diagonallinien BG und QM der Grundflächen gehet, so muß dasselbe dadurch in zwey gleiche, dreyeckichte Prismata zergliedert werden. Denn die beyden dreyeckichten Prismata, welche durch diese Theilung entstehen, haben einerley Höhe, und ihre Grundflächen, nämlich die Triangel CBG und BDG sind einander gleich; weil ein Parallelogram durch die Diagonallinie in zwey gleiche Triangel getheilt wird (§. 92.). Folglich müssen sie auch selbst von gleichem Inhalte (§. 182.), und daher jedes die Hälfte von dem Parallelepipedo seyn. Es sey also die Höhe des Parallelepipedi = 10″, seine Grundfläche CBDG = 48 □″, folglich die Grundfläche des dreyeckichten Prisma, nämlich △ CBG $= \frac{48 \square''}{2}$ = oder 24 □″; so müßte der körperliche Inhalt des Parallelepipedi 48 × 10, d. i. 480 c″, folglich der Inhalt des dreyeckichten Prisma $\frac{1}{2}$ × 48 × 10 oder 24 × 10, d. i. 240 c″ seyn; woraus also erhellt, daß auch der Inhalt eines dreyeckichten Prisma gefunden wird, wenn man den Triangel,

welcher die Grundfläche desselben ist, ausrechnet, und hernach in die Höhe multiplíciret.

§. 199.

Weil sich alle vielseitige Figuren durch Diagonallinien in Triangel zertheilen lassen; so folgt hieraus, daß man ein vieleckichtes Prisma in lauter dreyeckichte von eben der Höhe zergliedern kann, deren Grundflächen zusammengenommen die Grundfläche des vieleckichten ausmachen. Multiplicirt man nun die Summe der Grundflächen dieser dreyeckichten Prismaten, aus welchen das vieleckichte bestehet, d. i. die Grundfläche des vieleckichten, in die Höhe desselben, so muß man nothwendig den Inhalt aller dieser dreyeckichten, und folglich des ganzen vieleckichten Prisma erhalten. **Es wird also ein jedes Prisma ausgemessen, wenn man seine Grundfläche in die Höhe multipliciret.**

§. 200.

Weil die Cylinder Prismata sind, welche Cirkel zu Grundflächen haben (§. 179.), so wird auch **der körperliche Inhalt eines Cylinders gefunden, wenn man die Grundfläche desselben in die Höhe multiplicirt.**

§. 201.

Lehrsatz. **Eine dreyeckichte Pyramide ist der dritte Theil von einem dreyeckichten Prisma, das eben die Grundfläche und Höhe hat.**

Beweis.

Man zerschneide ein dreyeckichtes Prisma, z. E. ABFDC (Fig. 106. Tab. 12.) durch eine Ebene dergestalt, daß der Schnitt nach den Diagonallinien zweyer Seitenflächen, z. E. nach den Diagonalen AD und BD gehet, so ist der Theil ABDN eine Pyramide, welche mit dem dreyeckichten Prisma einerley Grundfläche und Höhe hat. Hierauf zertheile man das andre Stück dieses Prisma nach der Diagonallinie der dritten Seitenfläche AF, und der ersten AD, so entstehen die beyden Pyramiden AFDC und ABFD. Die Pyramide AFDC hat ebenfalls einerley Grundfläche und Höhe mit dem Prisma, und also auch einerley Grundfläche und Höhe mit der vorigen Pyramide ABDN, woraus die Gleichheit dieser beyden Pyramiden folget (§. 188.). Nimmt man nun in der ersten Pyramide ABDN den Triangel NBD zur Grundfläche an, so ist A die Spitze derselben, welches auch die Spitze der dritten Pyramide ABFD ist, wenn man den Triangel BDF als ihre Grundfläche betrachtet. Da nun diese beyden Pyramiden eine gemeinschaftliche Spitze, und folglich einerley Höhe haben, auch ihre Grundflächen, nämlich die Triangel NBD und BDF einander gleich sind (§. 92.), so muß auch die Pyramide ABDN so groß, als die Pyramide ABFD seyn (§. 188.). Sind nun alle drey Pyramiden, in welche das dreyeckichte Prisma zerschnitten worden, gleich groß (§. 11. Ar.), so muß eine jede davon, und folglich auch ABDN, d. i. eine Pyramide, die mit dem Prisma einerley Grundfläche und Höhe hat, der dritte Theil davon seyn.

§. 202.

Der vorige Beweis ist am leichtesten einzusehen, wenn man sich ein dreyeckichtes Prisma von Holz oder von einer andern Materie machen, und auf die gehörige Art zerschneiden läßt.

§. 203.

Man findet also den körperlichen Inhalt einer dreyeckichten Pyramide, wenn man den dritten Theil von dem Producte aus ihrer Grundfläche in ihre Höhe nimmt, oder wenn man den dritten Theil der Höhe in die ganze Grundfläche, oder den dritten Theil der Grundfläche in die Höhe multiplicirt. Es sey z. E. die Grundfläche einer Pyramide 90 Quadratzoll und ihre Höhe 18 Längenzoll; so würde ihr körperlicher Inhalt $\frac{90 \times 18}{3}$ oder 30×18 oder 90×6 d. i. 540 Cubikzoll betragen.

§. 204.

Alle übrigen Pyramiden lassen sich, wie die vieleckichten Prismata, in dreyeckichte zergliedern. Es ist daher auch der körperliche Inhalt der vieleckichten Pyramiden der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe.

§. 205.

Weil die Kegel Pyramiden sind, die reguläre Unendlichecke, d. i. Cirkel zu Grundflächen haben; so läßt sich auch der körperliche Inhalt eines Kegels finden, wenn man die Grundfläche in die Höhe multipliciret, und dieses Product durch 3 dividirt.

§. 206.

§. 206.

Vergleicht man also einen Cylinder mit einem Kegel, welcher einerley Grundfläche und Höhe mit ihm hat; so ist klar, daß der Kegel der dritte Theil von einem solchen Cylinder seyn muß.

§. 207.

Lehrsatz. Alle prismatischen Körper verhalten sich, wie die Höhen, wenn sie gleiche Grundflächen haben, und wie die Grundflächen, wenn die Höhen einerley sind.

Beweis.

Es heisse ein Prisma P, seine Grundfläche G, und seine Höhe H; ein anderes Prisma p, seine Grundfläche g, und seine Höhe h, so ist

$$\left.\begin{array}{l} P = G \times H \\ p = g \times h \end{array}\right) \quad (\text{§. 199.})$$

$$P : p = G \times H : g \times h \quad (\text{§. 9. Ar.})$$

Nimmt man nun an, daß die Grundflächen in beyden gleich seyn sollen, folglich $G = g$, so kann man in der vorigen Proportion statt g den Buchstaben G setzen,

$$P : p = G \times H : G \times h$$

$$P : p = \frac{G \times H}{G} : \frac{G \times h}{G} \quad (\text{§. 104. Ar.})$$

d. i. $P : p = H : h$ (§. 19. Ar.)

Sind aber die Höhen in beyden gleich, d. i. $H = h$, so kann man in der vorigen Proportion statt h die Grösse H setzen. Folglich

$$P : p = G \times H : g \times H$$

$$P : p = \frac{G \times H}{H} : \frac{g \times H}{H}$$ (§. 104. Ar.)

d. i. $P : p = G : g$ (§. 19. Ar.)

§. 208.

Es müssen sich also auch die Cylinder, wie die Höhen verhalten, wenn sie gleiche Grundflächen, und wie die Grundflächen, wenn sie gleiche Höhen haben (§. 200.). Da nun die Grundflächen der Cylinder Cirkel sind (§. 179.), und die Cirkel sich wie die Quadrate ihrer Diameter oder ihrer Radien verhalten (§. 161. 162.), so ist klar, daß sich die Cylinder, die einerley Höhe haben, wie die Quadrate der Diameter oder der Radien ihrer Grundflächen verhalten.

§. 209.

Weil sich die Drittel wie die Ganzen verhalten (§. 103. Ar.), und der Inhalt der Pyramiden und Kegel der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe ist (§. 204. 205.); so müssen sich auch die Pyramiden und Kegel von gleichen Höhen, wie die Grundflächen, und wenn die Grundflächen gleich sind, wie die Höhen verhalten.

§. 210.

§. 210.

Da die Grundflächen der Kegel nichts anders, als Cirkel sind (§. 185.), so gilt auch von den Kegeln, die einerley Höhen haben, dasjenige, was von den Cylindern von gleichen Höhen (§. 208.) gesagt worden ist, daß sie sich nämlich eben so verhalten, wie die Quadrate der Durchmesser oder der Halbmesser ihrer Grundflächen.

§. 211.

Wenn eine Kugel durch eine Ebene geschnitten wird, so entstehet allemal ein Cirkel, und geht der Schnitt durch den Mittelpunct, so wird die Kugel dadurch in zwey gleiche Theile zergliedert. Der Cirkel, welcher auf diese Art entsteht, wird ein **größter Cirkel** der Kugel (Circulus Sphaerae maximus) genannt; weil er grösser ist, als alle übrigen, die man sich auf der Kugelfläche vorstellen kann, und die nicht einerley Mittelpunct mit der Kugel haben. Zerschneidet man also die Halbkugel parallel mit der Fläche des größten Cirkels, aber so, daß die Schnitte eine undenklich kleine Entfernung von einander haben; so müssen die Theile der Halbkugel, welche durch diese Zergliederung entstehen, für Cylinder von undenklich kleiner Höhe gehalten werden können.

§. 212.

Lehrsatz. Eine Halbkugel ist $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Diameter dem Diameter der Halbkugel, und dessen Höhe ihrem Halbmesser gleich ist.

Beweis.

Es sey (Fig. 107. Tab. 12.) BNCF ein Quadrat, BNF der vierte Theil eines Cirkels, und BNC ein rechtwinklichter Triangel. Nun stelle man sich vor, daß sich diese drey Figuren um die gemeinschaftliche Seite BN bewegen; so muß durch die Bewegung des Quadrats ein Cylinder, durch die Bewegung des Quadranten eine Halbkugel, und durch die Bewegung des rechtwinklichten Triangels ein Kegel entstehen. Da alle diese drey Körper einerley Höhe haben; so ist klar, daß man aus dem einen eben so viel Stücke wird schneiden können, als aus dem andern und dritten, wenn man denselben einerley Dicke giebt. Wir wollen also setzen, daß sowohl der Cylinder, als auch der Kegel und die Halbkugel parallel mit den Grundflächen durchschnitten würden, und die Schnitte eine undenklich kleine Entfernung von einander hätten, so müßte nicht nur der Cylinder, sondern auch der Kegel (§. 187.) und die Halbkugel (§. 211.) dadurch in lauter kleine Cylinder von einerley Höhen zergliedert werden. Es sey nun PS parallel mit BF, und folglich auch mit NC; so stellt PQ den Halbmesser eines Durchschnitts im Kegel, PG den Halbmesser eines Durchschnitts in der Halbkugel, und PS selbst den Halbmesser eines Durchschnitts im Cylinder vor. Vergleichen wir nun die Quadrate dieser Linien mit einander; so erfahren wir dadurch, wie sich die kleinen Cylinder verhalten, deren Halbmesser sie vorstellen (§. 208.). Es ist aber

PS = BF (§. 93.);
BF = BG (§. 29.)

PS = BG (§. 11. Ar.)

$PS^q = BG^q$

Fer-

Ferner, weil PQ parallel mit NC

BN : NC = BP : PQ (§. 146.)
BN = NC vermöge der Voraussetzung.

Folglich auch BP = PQ

und $BP^q = PQ^q$

Da nun BNC der Winkel eines Quadrats, und also ein rechter Winkel ist; so muß auch BPG ein rechter Winkel seyn (§. 65.). Folglich in dem rechtwinklichten Triangel BGP

$BG^q = BP^q + PG^q$ (§. 103.)
$BG^q = PS^q$ und $BP^q = PQ^q$ wie vorhin erwiesen wurde.

$PS^q = PQ^q + PG^q$ (§. 9. Ar.)

Und weil sich Cylinder von einerley Höhen, wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten (§. 208.), so müssen die beyden kleinen Cylinder, deren Halbmesser PQ und PG sind, d. i. ein Theil des Kegels, und ein Theil der Halbkugel zusammengenommen, einem Theile des Cylinders, welcher eben die Dicke und zum Halbmesser PS hat, nothwendig gleich seyn. Dieses gilt aber nicht nur von denjenigen Theilen dieser Körper, welche ich jetzt mit einander verglichen habe; denn der Beweis würde immer derselbe seyn, wenn man sich diese Schnitte weiter von der Grundfläche oder näher bey derselben vorstellen wollte. Ist also überall ein Theil des Kegels nebst einem Theile der Halbkugel so groß, als ein Theil des Cylinders;

so muß auch der ganze Kegel und die ganze Halbkugel zusammengenommen dem ganzen Cylinder gleich seyn. Es ist aber der Kegel, weil er einerley Grundfläche und Höhe mit dem Cylinder hat, der dritte Theil des Cylinders (§. 206). Folglich muß die Halbkugel $\frac{2}{3}$ von dem Cylinder enthalten, dessen Diameter MF dem Diameter der Halbkugel, und dessen Höhe NB dem Halbmesser derselben gleich ist.

§. 213.

Es ist also die ganze Kugel $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, dessen Höhe noch einmal so groß ist, als die Höhe des vorigen, d. h. dessen Höhe und Diameter dem Diameter der Kugel gleich ist.

Dieser wichtige Satz ist eine Erfindung des Archimedes, welcher daran einen so grossen Wohlgefallen hatte, daß er dieselbe auf sein Grabmal zu setzen befahl.

§. 214.

Man könnte daher den körperlichen Inhalt einer Kugel finden, wenn man den körperlichen Inhalt eines Cylinders suchte, dessen Höhe und Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich wäre, und davon $\frac{2}{3}$ nähme. Wir wollen den Diameter einer Kugel und des Cylinders, wovon die Kugel $\frac{2}{3}$ seyn soll, d, die Peripherie der Kugel, und folglich auch der Grundfläche dieses Cylinders p nennen; so stellt das Product $\frac{1}{4}$ dp den Inhalt der cylindrischen Grundfläche (§. 136.), und weil die Höhe des Cylin-

linders dem Diameter der Kugel gleich gesetzt wird, und also ebenfalls d ist, das Product $\frac{1}{4}$ dpd $=$ $\frac{1}{4}$ pd^2 (§. 200.) den körperlichen Inhalt des Cylinders vor. Der dritte Theil von $\frac{1}{4}$ pd^2 ist $\frac{1}{12}$ pd^2, und folglich zwey Drittel davon, nämlich $\frac{2}{12}$ pd^2 $=$ $\frac{1}{6}$ pd^2, der Inhalt der Kugel (§. 213.). Hieraus ergiebt sich also die Regel: **daß man den körperlichen Inhalt einer Kugel ausrechnen könne, wenn man das Quadrat ihres Diameters in die Peripherie multiplicire, und dieses Product durch 6 dividire.** Es sey z. E. d, d. i. der Diameter einer Kugel, 100 Zoll, so wäre p oder die Peripherie derselben 314″ (§. 137.), und daher der körperliche Inhalt

$$\frac{314 \times 100^2}{6} = \frac{3140000}{6} = 523333\frac{1}{3}\text{c}''$$

§. 215.

Wenn man sich vorstellt, daß die Oberfläche einer Kugel in undenklich kleine Theile, z. E. in lauter kleine Vierecke zergliedert sey, so wird man diese kleine Theile der Oberfläche für ebene Flächen, und, wenn man von den Ecken dieser kleinen Vierecke sich gerade Linien gegen den Mittelpunct der Kugel gedenkt, die ganze Kugel für eine Summe von Pyramiden halten können, deren Höhe der Halbmesser der Kugel, und deren Grundflächen diese unendlich kleinen Vierecke, welche zusammen genommen die ganze Oberfläche der Kugel ausmachen, seyn würden. Es heisse ein solcher undenklich kleiner Theil von der Oberfläche der Kugel g, die Anzahl derselben n, und die Oberfläche der Kugel selbst s, so ist

$$g \times n = s$$

Der

Der Halbmesser der Kugel, und also die Höhe der kleinen viereckichten Pyramiden, die zusammen genommen die ganze Kugel ausmachen, heisse r, so ist der körperliche Inhalt einer solchen Pyramide, weil g die Grundfläche bedeutet,

$$\frac{1}{3} \text{ I} \times g \quad (\S. 204.)$$

und weil n die Anzahl derselben vorstellt, die Summe aller dieser Pyramiden, folglich der Inhalt der Kugel

$$\frac{1}{3} r \times g \times n = \frac{1}{3} r \times s$$

weil $g \times n = s$ vermöge der angenommenen Bedingung ist. Hieraus ist also klar, daß man auch den Inhalt der Kugel erhält, wenn man den dritten Theil des Halbmessers in die Oberfläche derselben multipliciret. Weil nun der Halbmesser die Hälfte des Durchmessers, und folglich $\frac{1}{3}$ des Halbmessers $\frac{1}{6}$ des Durchmessers ist, so pflegt man diesen Satz auch so auszudrücken: Das Product aus der Oberfläche der Kugel in den 6ten Theil des Diameters, oder der 6te Theil des Products aus der Oberfläche in den Diameter der Kugel, ist der körperliche Inhalt derselben. Nennt man also den Diameter, wie vorhin, d, so ist

$$\frac{1}{3} rs = \frac{1}{6} ds$$

§. 216.

Vergleicht man diesen Satz mit dem vorhergehenden; so läßt sich daraus einsehen, wie man die Ober-

Oberfläche der Kugel berechnen könne. Denn da nach §. 214 der Inhalt der Kugel durch das Product $\frac{1}{6}$ pd², und nach §. 215 auch durch das Product $\frac{1}{6}$ ds ausgedrückt werden kann; so folgt hieraus, weil der Buchstabe d in beyden Ausdrücken einerley Bedeutung hat, daß

$$\frac{1}{6}\,pd^2 = \frac{1}{6}\,ds \quad (\S.\ 9.\ Ar.)$$

$$6 \times \frac{1}{6}\,pd^2 = 6 \times \frac{1}{6}\,ds \quad (\S.\ 17.\ Ar.)$$

$$\text{d. i.} \quad pd^2 = ds$$

$$\frac{pd^2}{d} = \frac{ds}{d} \quad (\S.\ 18.\ Ar.)$$

$$\text{d. i.} \quad pd = s \quad (\S.\ 19.\ Ar.)$$

d. h. weil d den Diameter, p die Peripherie, und s die Oberfläche der Kugel bedeutet, ein Product aus dem Diameter in die Peripherie giebt die Oberfläche der Kugel. Will man z. E. wissen, wie viel die Oberfläche unsrer Erde Quadratmeilen enthält, so darf man nur 5400 Meilen, als die Peripherie der Erde, in 1720 Meilen, als den Durchmesser derselben, multipliciren. Das Product aus diesen beyden Zahlen ist 9288000. So viel Quadratmeilen beträgt also die Oberfläche unsrer Erde.

§. 217.

Weil der größte Cirkel einer Kugel mit ihr einerley Mittelpunct und Diameter (§. 211.), folglich

auch

auch einerley Peripherie hat; so können die Buchstaben d und p auch den Diameter und die Peripherie des größten Cirkels bedeuten. Das Product $\frac{1}{4}$ pd würde also die Fläche des größten Cirkels vorstellen (§. 136.). Nun war die Oberfläche der Kugel pd (§. 216.). Da nun pd viermal mehr beträgt, als $\frac{1}{4}$ pd; so ist klar, daß die Oberfläche der Kugel viermal grösser ist, als die Fläche des größten Cirkels.

§. 218.

Die Oberfläche der Kugel und der körperliche Inhalt derselben läßt sich also leicht berechnen, wenn man nur den Diameter gemessen hat. Es sey z. E. der Diameter einer Kugel 50 Schuh, so mache man erstlich die Peripherie

100 : 314 = 50′ : Per.
50

100) 15700 (157′ = Per.

Ist nun 157′ die Peripherie, so beträgt die Oberfläche der Kugel 157′ × 50′ d. i. 7850 Quadratschuh (§. 216.). Diese Zahl 7850□′ multiplicire man durch den 6ten Theil von 50, oder durch 50, und dividire das Product mit 6, z. E.

7850□′
50′

392500

6) 65416$\frac{2}{3}$ c′

50

so muß die Zahl 65416 $\frac{2}{3}$ die Cubikschuh anzeigen, welche eine Kugel enthält, deren Diameter 50 Schuh lang ist (§. 215.).

§. 219.

Wenn man dem Diameter 100 Theile giebt, so ist der körperliche Inhalt der Kugel 523333 $\frac{1}{3}$, wie schon §. 214 gezeigt worden ist. Stellt man sich nun einen Würfel vor, dessen Seite so groß ist, wie der Diameter der Kugel, und folglich ebenfalls 100 Theile enthält, so wird der körperliche Inhalt desselben 100 × 100 × 100, d. i. 1000000 seyn (§. 195.). Nennt man nun die Kugel k, und den Diameter d, so verhält sich also

$$k : d^3 = 523333\tfrac{1}{3} : 1000000$$

$$k : d^3 = 523333\tfrac{1}{3} \times 3 : 1000000 \times 3$$ (§. 101. Ar.)

d. i. $k : d^3 = 1570000 : 3000000$

$$k : d^3 = \frac{1570000}{10000} : \frac{3000000}{10000}$$ (§. 104. Ar.)

d. i. $k : d^3 = 157 : 300$

Nämlich es verhält sich die Kugel zu dem Würfel des Diameters, oder, welches eben so viel sagen will, der körperliche Inhalt der Kugel zu der Cubikzahl des Diameters, wie 157 zu 300. Da sich aber dieses Verhältnis auf das Verhältnis 100 : 314 gründet, welches nicht nach der größten Schärfe richtig ist; so kann

auch

auch dasselbe nicht für ganz vollkommen richtig gehalten werden. Doch kann man sich desselben in der Ausübung bedienen, weil der Fehler, welcher dabey begangen wird, in den meisten Fällen sehr unbeträchtlich ist.

§. 220.

Durch Hülfe des vorigen Verhältnisses läßt sich der körperliche Inhalt einer Kugel noch auf eine andere Art ausrechnen. Denn verhält sich die Kugel zu dem Würfel des Diameters wie 157 zu 300, so muß sich umgewendet 300 zu 157, wie die Cubikzahl des Diameters zu dem Inhalte der Kugel verhalten. Folglich kann man durch Hülfe der Regel Detri den körperlichen Inhalt der Kugel finden, wenn man zu 300, 157 und der Cubikzahl des Diameters die vierte Proportionalzahl sucht, d. h. wenn man die Cubikzahl des Diameters durch 157 multiplicirt, und dieses Product hernach durch 300 dividirt. Z. E. es sey der Diameter einer Kugel, deren Inhalt verlangt wird, wie §. 218 angenommen wurde, 50 Schuh. Man suche also von diesem Diameter die Cubikzahl

$$\begin{array}{r} 50^3 \\ 50 \\ \hline 2500 \\ 50 \\ \hline 125000^{cf} \end{array}$$

Nun

Nun schliesse man

$$300 : 157 = 1250\square^{cl} : \text{Inh. der Kugel}$$

1250

7850

314

157

196250

3) $65416\frac{2}{3}^{cl} = \text{Inh. der Kugel}$

wie wir ihn auch §. 218 gefunden haben.

§. 221.

Das vorige Verhältnis dient auch dazu, aus dem gegebenen Inhalt einer Kugel ihren Durchmesser zu finden. Z. E. es sey der Inhalt einer Kugel $91905706\frac{2}{3}^{c''}$, so muß die vierte Proportionalzahl zu 157, 300 und $91905706\frac{2}{3}^{c''}$ die Cubikzahl des Diameters (§. 219.), und daher die Cubikwurzel aus dieser vierten Proportionalzahl der Diameter selbst seyn (§. 195). Hieraus ist also klar, daß man aus dem gegebenen Inhalte einer Kugel den Diameter findet, wenn man denselben durch 300 multiplicirt, hierauf dieses Product durch 157 dividiret, und aus dem Quotienten die Cubikwurzel suchet. Die Rechnung selbst würde also folgende seyn, wo d^3 die Cubikzahl des Diameters bedeutet.

$$157 : 300 = 91905706\tfrac{2}{3}\,c'' : d^3$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ \hline 27571711\,800 \\ 200 \\ \hline 157)\ 2757171200\,000\,(17561600\,c'' = d^3 \\ 157 \\ \hline 1187 \\ 1099 \\ \hline 881 \\ 785 \\ \hline 967 \\ 942 \\ \hline 251 \\ 157 \\ \hline 942 \\ 942 \\ \hline 0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 175\,|\,616\,|\,000\,(560'' = d \\ 125 \\ \hline 50\,|\,616 \\ (75) \\ 450 \\ 540 \\ 216 \\ \hline 50616 \\ \hline 0\,|\,000 \end{array}$$

Es beträgt also die Grösse des Diameters der gegebenen Kugel 560 Zoll oder 56 Schuh.

§. 222.

Es heisse eine Kugel K und ihr Diameter D, eine andere Kugel k und ihr Diameter d, so kann man folgendergestalt schliessen:

$$\left.\begin{array}{l} K : D^3 = 157 : 300 \\ k : d^3 = 157 : 300 \end{array}\right) \text{ (§. 219.)}$$

$$K : D^3 = k : d^3 \quad \text{(§. 11. Ar.)}$$

$$K : k = D^3 : d^3 \quad \text{(§. 100. Ar.)}$$

d. h. die Kugeln verhalten sich wie die Würfel oder wie die Cubikzahlen ihrer Durchmesser. Ist also der Diameter einer Kugel zweymal so groß, als der Diameter einer andern Kugel, so muß sich die erste Kugel zu der andern wie $2^3 : 1^3$ d. h. wie 8 zu 1 verhalten. Wäre der Diameter der ersten Kugel dreymal so groß, als der Diameter der andern Kugel, so müßte die erste Kugel 27mal größer seyn, als die andre Kugel, weil in diesem Falle $D^3 : d^3 = 3^3 : 1^3 = 27 : 1$ u. s. f.

§. 223.

Weil man im gemeinen Leben, wie schon §. 192 angemerkt worden ist, den körperlichen Raum nicht allemal durch Würfel, sondern in vielen Fällen durch Cylinder auszumessen pflegt; so soll noch kürzlich

gezeigt werden, wie man ohne weitläuftige Rechnung, die Anzahl von Kannen finden könne, die in einem Fasse Raum haben, indem dieses derjenige Fall ist, der am häufigsten vorkömmt. Man nennt aber dergleichen Ausmessung eines Fasses **Visiren**, und daher denjenigen Maasstab, dessen man sich zu dieser Absicht bedient, einen **Visirstab**, wovon sonderlich zwo Arten zu merken sind. Die eine Art wird der **cylindrische**, und die andre Art der **cubische Visirstab** genannt.

§. 224.

Die Verfertigung eines cylindrischen Visirstabes geschiehet auf folgende Art. Man trägt erstlich auf beyde Schenkel eines rechten Winkels z. E. des Winkels B (Fig. 101. Tab. 11.) den Diameter desjenigen Kannenmaaßes, welches an dem Orte eingeführt ist, wo der Visirstab gebraucht werden soll, und macht also BA = BC so groß als diesen Diameter. Zieht man nun die Hypotenuse AC, so hat man den Diameter eines zweykannigen Gefäßes von eben der Höhe; weil Cylinder, die gleiche Höhen haben, sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten (§. 208.), AC aber so groß ist, als $2\,BC^2$, Denn

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 103.)

$AB^2 = BC^2$ weil $AB = BC$ vermöge der Constr.

$AC^2 = BC^2 + BC^2 = 2\,BC^2$

Macht man also $BD = AC$, und zieht die Hypotenuse AD, so erhält man den Diameter eines dreykannigen Gefäßes, welches die Höhe eines einkannigen hat. Denn

AD^2

$AD^2 = AB^2 + BD^2$ (§. 103.)

$BD^2 = AC^2$ weil $BD = AC$

$AD^2 = AB^2 + AC^2$ (§. 9. Ar.)

$AB^2 = BC^2$ und $AC^2 = 2\,BC^2$

$AD^2 = BC^2 + 2\,BC^2 = 3\,BC^2$ (§. 9. Ar.)

Weil nun das Quadrat von AD dreymal so groß ist, als das Quadrat von BC, und Cylinder von einerley Höhe sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten (§. 208.), so muß AD der Diameter eines 3kannigen Gefäßes seyn, welches mit dem einkannigen einerley Höhe hat. Man mache daher ferner $BF = AD$, und ziehe AF, so hat man aus eben dem Grunde den Diameter eines vierkannigen Gefässes, von eben der Höhe. Wird nun wieder $BG = AF$ gemacht und AG gezogen, so ist dieses der Diameter eines 5kannigen Gefässes, wie man leicht aus dem vorigen Beweise einsehen wird. Fährt man also auf diese Art fort, so erhält man die Durchmesser von einem 6kannigen, 7kannigen, 8kannigen u. s. w. Gefässe, in welchen allen einerley Höhe, nämlich die Höhe des Kannenmaaßes angenommen wird. Diese Durchmesser BC, BD, BF, BG u. s. f. trägt man auf die eine Seite eines prismatischen Stabes, den man von hartem Holze, Elfenbein oder Metall machen läßt, und schreibt die in der Figur dabey stehenden Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. f. dazu, damit man setzen könne, was für einen Diameter jede Linie bedeute. Auf die andre Seite des Stabes setzt man die Höhe des Kannengefässes so vielmal hinter einan-

der, als es die Länge des Stabes erlaubet; so ist der ganze Visirstab fertig, dessen Gebrauch sich schon aus seiner Construction erkennen läßt. Nämlich mit derjenigen Seite, auf welcher sich die Durchmesser befinden, mißt man den Diameter von der Grundfläche des cylindrischen Gefässes, dessen Inhalt man wissen will, damit man sieht, wie viel Kannen auf der Grundfläche des Cylinders neben einander stehen können. Mit der andern Seite aber, welche die Höhen des Kannenmaasses enthält, mißt man die Länge, oder die Höhe des auszumessenden Cylinders; so erfährt man dadurch, wie vielmal die Anzahl der Kannen, die auf der Grundfläche neben einander Raum haben, über einander stehen können.

§. 225.

Die Fässer, zu deren Ausmessung eigentlich der Visirstab gebraucht wird, sind zwar nicht vollkommene Cylinder, indem der Diameter des Bodens viel kleiner ist, als der Diameter des Bauches. Allein man hat durch die Erfahrung gefunden, daß der Fehler sehr unbeträchtlich ist, wenn man ein gewöhnliches Faß einem Cylinder gleich schätzt, dessen Höhe mit der Länge des Fasses übereinkommt, und dessen Diameter die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beyden Diametern des Bodens und des Bauches, d. h. die halbe Summe dieser beyden Diameter ist. Sollte man also z. E. das Faß BCNSM (Fig. 102. Tab. 11.) visiren, dessen Inhalt weniger, als des Cylinders PAFR, und mehr, als des Cylinders BCSM betragen muß; so messe man erstlich mit derjenigen Seite des Visirstabes, welcher die Durchmesser enthält, sowohl den Diame-

meter NB durch das Spundloch, als auch den Diameter CB am Boden, und mit der andern Seite, wo sich die Höhen des Kannengefässes befinden, die Länge des Fasses CS; hierauf addire man die Durchmesser NB und CB zusammen, und multiplicire die Hälfte dieser Summe durch die Länge des Fasses, so zeigt das Product die Menge Kannen an, welche in dem Fasse enthalten sind. Es sey z. E.

Diam. NB = 17
Diam. CB = 13

NB + CB = 30

$\frac{1}{2}$ (NB + CB) = 15
die Länge des Fasses CS = 20

Inhalt des Fasses = 300 Kannen

§. 226.

Der cubische Visirstab, welcher von unsern Weinvisirern gebraucht wird, gründet sich auf einen Satz, welcher sich zwar nach der größten Schärfe erweisen läßt, aber nicht bey allen Fässern statt haben kann, weil nicht alle Fässer von einer ganz ähnlichen Figur gemacht werden. Dieser Satz ist folgender:

Alle ähnlichen Körper verhalten sich wie die Cubikzahlen ihrer gleichnahmigen Seiten, oder wie die Diagonalen, welche proportionirliche Theile und einerley Winkel umspannen.

So ist z. E. aus §. 195 klar, daß sich alle Würfel, wie die Cubikzahlen ihrer Seiten verhalten.

Beträgt die Seite eines Würfels zwey Zoll, und die Seite eines andern Würfels nur einen Zoll; so ist der erste Würfel achtmal grösser, als der andre. Wäre aber die Seite der ersten Würfels dreymal grösser, als die Seite des andern Würfels, so müßte der erste Würfel selbst 27mal grösser seyn, als der andre Würfel u. s. f. Eben dieses gilt auch von den Diagonalen, weil sie mit den beyden Seiten der Würfel, die von ihnen umspannt werden, ähnliche Triangel bilden, und in ähnlichen Triangeln die Seiten, welche einerley Winkeln gegenüberstehen, auch einerley Verhältniß haben. Daß sich die Kugeln wie die Cubikzahlen ihrer Durchmesser verhalten, ist bereits §. 222 erwiesen worden. Und was ich itzt von den Würfeln und Kugeln angeführt habe, läßt sich überhaupt von allen ähnlichen Körpern darthun, daß sie sich nämlich, wie die ähnlich liegenden Diagonalen verhalten; ich würde aber in zu grosse Weitläuftigkeit gerathen, wenn ich mich in einen allgemeinen Beweis dieses Satzes einlassen wollte.

§. 227.

Vermittelst des jetzt angeführten Satzes kann man also folgenden Visirstab verfertigen. Man läßt nämlich ein kleines Fäßchen machen, welches den grössern Fässern, die man visiren will, ähnlich ist, und genau ein gewisses Maaß, z. E. eine hiesige Kanne enthält. Die gerade Linie von der Mitte des Spundlochs gegen die Ecke dieses Fäßchens, z. E. NM (Fig. 102. Tab. 11.) nimmt man zur Einheit an, und trägt dieselbe auf den Visirstab, so daß CB = NM (Fig. 101.) und schreibt daher an den Endpunct dieser Linie 1. Um nun die Grösse der

Li-

Linie NM bey einem zweykannigen Fäßchen zu bestimmen, theilt man CB oder NM in eine beliebige Anzahl von gleichen Theilen, z. E. in 100. Ist also CB = 100, so ist die Cubikzahl von CB = 1000000, und daher diese Zahl zweymal genommen, nämlich 2000000, die Cubikzahl von NM bey einem zweykannigen Fäßchen. Zieht man nun hieraus die Cubikwurzel, so bekömmt man 125. Giebt man also der Linie DB (Fig. 101.) 125 solcher Theile, deren CB hundert enthält; so ist DB die gesuchte Diagonale bey einem zweykannigen Fäßchen; daher schreibt man an den Punct D die Zahl 2. Nimmt man ferner die Cubikzahl von 100 dreymal, und sucht hieraus wieder die Cubikwurzel; so läßt sich die Linie NM bey einem dreykannigen Fäßchen, und also der Punct F auf dem Visirstabe bestimmen. Hieraus wird ein jeder leicht einsehen, wie man auch die Puncte G, N, Q u. s. f. durch eine leichte Rechnung finden könne. Will man nun, vermittelst eines solchen Visirstabes, den Inhalt eines Fasses bestimmen; so darf man nur den Visirstab durch das Spundloch gegen die Ecke des Fasses stecken, damit er nämlich nach der Richtung NM (Fig. 102.) zu liegen komme, und hierauf Achtung geben, wie weit der Visirstab naß geworden ist. Die an dem Ende des naß gewordenen Theils befindliche Zahl zeigt die Menge der in dem visirten Fasse enthaltenen Kannen an.

§. 228.

Weil man also bey dieser Art des Visirens gar nicht zu rechnen braucht; so läßt sich die Ursache leicht einsehen, warum man sich gemeiniglich des

cubischen und nicht des cylindrischen Visirstabes zu bedienen pflegt: denn viele von denjenigen Personen, die zum Visiren gebraucht werden müssen, sind im Rechnen ganz unerfahren. Allein es ist gewiß, daß man, wegen der Unähnlichkeit der Fässer, den Inhalt derselben durch Hülfe des cubischen Visirstabes nicht allemal genau bestimmen könne. Der Gebrauch des cylindrischen Visirstabes ist viel sicherer, obgleich der Satz, worauf sich diese Art zu visiren gründet, sich nicht geometrisch erweisen läßt. Unter den Erfahrungen, welche dieses bestätigen, verdient hier vorzüglich diejenige angemerkt zu werden, welche Herr Prof. Büsch in seinem Versuch einer Mathematik zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens S. 158 anführt. Es wurden nämlich zu Hamburg im Jahr 1761 auf öffentlichen Befehl und in Gegenwart einiger Deputirten acht bis zehn Fässer von verschiednen Figuren, deren einige noch dazu, durch Fehler der Faßbinder, ganz unförmlich waren, mit Wasser angefüllt, alsdenn nicht nur mit dem cylindrischen, sondern auch mit dem cubischen Visirstabe von geschwornen Personen visiret, und hierauf das in den Fässern befindliche Wasser mit dem Maaße eines französischen Viertels, wornach die Visirstäbe verfertiget waren, unmittelbar gemessen. Bey keinem Fasse wich das durch den cylindrischen Visirstab gefundene Maaß auch nur um ein halbes Viertel von dem wahren Maaße ab. Der cubische Visirstab aber traf nur bey gewissen französischen ganzen und halben Branntweinstückfässern zu, für welche er eigentlich eingerichtet war, und gab für die Fässer einer andern Figur bald mehr, bald weniger, als der eigentliche Inhalt betrug.

§. 229.

Bisweilen soll man den Inhalt solcher Körper bestimmen, die unter keine der Classen gehören, mit denen wir uns jetzt beschäftiget haben. In diesem Falle kann man sich folgender Methode bedienen, wenn der Körper nicht allzu groß ist. Man legt ihn nämlich in ein prismatisches oder cylindrisches Gefäß, und füllt dasselbe mit Wasser, oder wenn der Körper das Wasser nicht vertragen kann, mit Sande ganz an. Hierauf nimmt man ihn wieder heraus und berechnet denjenigen Theil des prismatischen oder cylindrischen Gefässes, der nunmehr von Wasser, oder Sande leer ist; so erfährt man dadurch die Grösse desjenigen Raums, welchen der Körper einnimmt. Soll der hohle Raum eines irregulären Gefässes, welches sich leicht mit Wasser füllen läßt, ausgemessen werden, so kann dieses dadurch geschehen, wenn man die Schwere der Menge desjenigen Wassers, welches in dem Gefässe Raum hat, und hernach die Schwere eines Cubikzolls oder Cubikschuhs Wassers bestimmt. Beträge z. E. die Schwere des ganzen in dem Gefässe befindlichen Wassers 640 Pfund und die Schwere eines Cubikschuh Wassers 64 Pfund, so könnte man folgendergestalt schliessen:

$$64 \text{ Pf.} : 640 \text{ Pf.} = 1^{c\prime} : x$$

$$X = \frac{640 \times 1}{64} = 10 \text{ Cub. Schuh.}$$

Die

Die ebene Trigonometrie.

Erstes Capitel.

Von den Erklärungen und allgemeinen Gründen der Trigonometrie.

§. 1.

Durch das Wort **Trigonometrie**, welches einige durch **Dreyeckmessung** übersetzen, versteht man nicht überhaupt die Wissenschaft von der Ausmessung der Triangel, wie man aus der Etymologie vermuthen könnte, sondern diejenige Wissenschaft, welche aus einigen bekannten Theilen eines Triangels die übrigen durch Rechnung finden lehret. Sie unterscheidet sich also blos in Ansehung der Methode von demjenigen Theile der Geometrie, der sich mit Betrachtung der Triangel beschäfriget, indem man, wie wir bisher gesehen haben, in der Geometrie das Unbekannte eines Triangels aus dem Bekannten nicht durch Rechnung, sondern durch Verzeichnung eines gleichen oder eines ähnlichen Triangels und durch unmittelbare Messung des gesuchten Theils findet.

§. 2.

§. 2.

Man pflegt die Trigonometrie gemeiniglich in die ebene und sphärische einzutheilen. Die ebene **Trigonometrie** (trigonometria plana) womit wir uns jetzt allein beschäftigen werden, handelt von der Ausrechnung geradelinichter Triangel. In der **sphärischen Trigonometrie** aber lehret man solche Triangel ausrechnen, deren Seiten Bogen grösster Cirkel auf der Oberfläche einer Kugel sind, und die man deswegen **sphärische Triangel** nennt.

§. 3.

Wenn man überlegt, daß man nach der geometrischen Methode sowohl bey der Verzeichnung eines Triangels, als auch bey der Abmessung desjenigen Theils, den man eigentlich sucht, wegen der Unvollkommenheit der Instrumente und unsrer Sinne nothwendig Fehler begehen muß, so wird man an dem Nutzen und Nothwendigkeit der Trigonometrie nicht zweifeln können, indem man bey der trigonometrischen Methode die Verzeichnung der Triangel und das wirkliche Abmessen des Unbekannten entbehren kann, und überhaupt alle Grössen durch Rechnen viel genauer, als durch unmittelbares Abmessen gefunden werden; weil man durch den Verstand die kleinsten Theile, die sich durch Hülfe der Sinne nicht mehr bemerken lassen, sehr leicht unterscheiden kann. Ein Beyspiel wird Anfänger von der Wahrheit dieser Sache vielleicht noch mehr überzeugen. Wir wollen setzen, man sollte durch Hülfe der Geometrie eine Weite finden, die viele Meilen betrüge; in welchem Falle man genöthiget seyn würde, um einen ähnlichen Triangel auf das Papier zu ver-

verzeichnen, eine Linie von einem Zoll Länge in dem verjüngten Maasstabe einige tausend Ruthen bedeuten zu lassen. Wir wollen also z. E. annehmen, ein Zoll bedeute 20000 Ruthen, und man fehlte im Abmessen der gefundenen Linie, welche die Weite vorstellt, nur um den 100ten Theil eines Zolls, welcher Fehler bey Ungeübten sehr häufig vorkömmt, so hätte man bey der zu suchenden Weite schon um 200 Ruthen gefehlt, gesetzt auch, daß bey dem Abmessen der Winkel und Linien, die zur Construction des ähnlichen Triangels nöthig sind, und bey der Construction des Triangels selbst, nicht der geringste Fehler wäre begangen worden. Ueberdieses kann man zwar die Winkel durch gute Instrumente bis auf Minuten und Theile der Minuten messen, aber nicht eben so genau auf das Papier tragen, weil die Instrumente, durch welche eine solche Genauigkeit möglich ist, nothwendig eine ansehnliche Grösse haben müssen; daher bey Verzeichnung der Triangel auch in Ansehung dieses Umstandes die Fehler nicht zu vermeiden sind. Am Himmel sind oft Linien zu messen, die viel Tausend Millionen Meilen betragen. Wollte man diese Messung durch Verzeichnung eines ähnlichen Triangels nach der geometrischen Methode vornehmen, so müßte man in dem verjüngten Maasstabe eine Linie, die etwa einen Zoll lang wäre, 1000 und mehr Millionen Meilen bedeuten lassen. Hier würde man, wenn man bey der Abmessung der gefundenen Linie nach dem verjüngten Maasstabe nur um den 1000ten Theil eines Zolls fehlte, schon einen Fehler von einer Million Meilen begehen, wobey doch wieder vorausgesetzt wird, daß die Winkel nach der größten Schärfe verzeichnet worden, welches sich

aber

aber nicht thun läßt. Aus diesen Betrachtungen wird auch der Ungeübteste leicht einsehen, daß man, ohne die Trigonometrie, in sehr vielen Fällen sich gar keine grosse Genauigkeit versprechen könnte.

§. 4.

In einem geradelinichten Triangel steht zwar allemal dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber; z. E. ist in dem Triangel ANQ, (Fig. 115. Tab. 12.) der Winkel ANQ grösser als der Winkel AQN, so muß auch nothwendig die Seite AQ grösser seyn, als die Seite AN. Denn wenn man den kleinern Winkel AQN in den grössern ANQ setzt, und also $< RNQ = < RQN$ macht, so ist

$$RN = RQ \text{ (§. 76. Geom.)}$$

$$AR + RN = AR + RQ \text{ (§. 18. Ar.)}$$
$$AR + RQ = AQ \text{ (§. 10. Ar.)}$$

$$AR + RN = AQ \text{ (§. 11. Ar.)}$$
$$AR + RN > AN \text{ (§. 32. Geom.)}$$

$$AQ > AN \text{ (§. 9. Ar.)}$$

Allein man würde sich sehr irren, wenn man daraus schliessen wollte, daß die Winkel sich eben so verhalten müßten, wie die gegenüberstehenden Seiten. Denn man betrachte nur einen rechtwinklichten Triangel, in welchem sich zwey gleiche Seiten befinden, z. E. den Triangel ACB (Fig. 101. Tab. 11.) wo $AB = BC$, folglich auch der Winkel ACB = dem Winkel CAB (§. 74. Geomet.). Da B ein rechter

Win-

Winkel ist, und alle drey Winkel so viel als zwey rechte Winkel betragen (§. 68. Geom.), so müssen die beyden Winkel ACB und CAB zusammengenommen auch einen rechten Winkel, und daher jeder einzeln genommen einen halben rechten Winkel, oder 45 Grad ausmachen. Die Winkel B und ACB verhalten sich also wie 2 zu 1. Daß sich aber die gegenüberstehenden Seiten AC und AB nicht eben so verhalten, läßt sich leicht aus dem pythagorischen Lehrsatze einsehen. Es sey z. E. BC, und also auch BA = 5,

so ist $AC^2 = BA^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2$ (§. 103. Geom.)
d. i. $AC^2 = 25 + 25 = 50$

$AC = \sqrt{50}$

Sucht man nun die Quadratwurzel aus 50, so findet man die Zahl 7 und einen Bruch, der ohngefehr $\frac{7}{100}$ beträgt. Es verhalten sich also die Seiten AC und AB wie $7\frac{7}{100}$ zu 5, folglich gar nicht wie 2 zu 1, d. i. gar nicht, wie die gegenüberstehenden Winkel. Da sich nun die Cirkelbogen, die man in der Geometrie zum Maas der Winkel annimmt, wie die Winkel selbst, und folglich auch nicht wie die gegenüberstehenden Seiten eines Triangels verhalten; so läßt sich leicht einsehen, daß man die Regel Detri zur Berechnung der Winkel und Seiten eines Triangels aus gegebenen Winkeln und Seiten nicht würde gebrauchen können, wenn man auch statt des Verhältnisses der Winkel, das Verhältniß der Bogen, durch welche sie gemessen werden, nehmen wollte. Man ist daher genöthiget gewesen, in der Trigonometrie gewisse gerade Linien ausfindig zu machen, wel-

welche sich statt der Winkel und Bogen gebrauchen lassen, und mit den Seiten der Triangel im Verhältniß stehen. Diese Linien nun müssen vor allen Dingen erklärt werden.

§. 5.

Die senkrechte Linie aus dem Endpuncte eines Bogens auf den Halbmesser, welcher sich aus dem andern Endpuncte desselben ziehen läßt, heißt der **Sinus** dieses Bogens, und auch desjenigen Winkels, der durch diesen Bogen gemessen wird. So ist z. E. die senkrechte Linie NP (Fig. 109. Tab. 12.) der Sinus des Bogens NA, und des Winkels o. Das Zeichen, womit man die Sinus anzeigt, ist der erste Buchstabe, oder die drey ersten Buchstaben dieses Worts. Das jetzt angeführte Beyspiel würde man daher also schreiben:

NR = S. o = S. NA
oder NP = Sin. o = Sin. NA

§. 6.

Verlängert man den Sinus NP bis an den entgegensetzten Punct der Peripherie F, so ist NF eine Chorde, und NP die Hälfte davon, so wie NA die Hälfte des Bogens NAF seyn muß (§. 111. Geom.), der Sinus eines Bogens ist also die Hälfte einer Chorde, die zu einem noch einmal so grossen Bogen gehört.

§. 7.

Weil die Chorde NF nicht nur zu dem Bogen NAF, sondern auch zu dem Bogen NRF gehöret,

so ist NP nicht nur der Sinus des Bogens NA oder des Winkels o, sondern auch des Bogens NR und des Winkels u. Zwey Bogen also, die zusammen eine halbe Peripherie ausmachen, oder zwey Winkel, die zusammengenommen 180 Grad betragen, haben einerley Sinum.

§. 8.

Es sey (Fig. 110.) der Bogen TN ein Quadrant, und folglich der Winkel TCN = 90°, so ist die senkrechte Linie NC der Sinus dieses Bogens und Winkels. NC aber ist ein Radius, folglich ist klar, daß der Sinus eines rechten Winkels, oder eines Bogens von 90 Graden dem Halbmesser des Cirkels gleich ist. Und weil der Radius die größre halbe Chorde ist, und daher auch der Sinus eines Bogens von 90 Graden der größte Sinus seyn muß, so hat man denselben zum Maasstabe der übrigen angenommenen, und den Sinus Totus genannt. Man zeigt denselben entweder durch den Buchstaben R, oder durch die Abbreviatur Sin. Tot. an.

§. 9.

Wenn man, wie vorhin, aus den Endpuncten eines Bogens, z. E. des Bogens AN (Fig 109.) Halbmesser ziehet; an das Ende des einen Halbmessers AC eine senkrechte Linie errichtet, und den andern Halbmesser NC verlängert, bis er dieselbe schneidet, so wird die dadurch bestimmte senkrechte Linie TA die Tangente, und der verlängerte Radius TC, welcher die Tangente schneidet, die Secante des Bogens NA oder des Winkels o genannt.

Das

Das Zeichen der Tangenten ist T. oder Tang. und der Secanten Sec. Derjenige Theil des Halbmessers, der zwischen dem Tangenten und Sinus enthalten ist, nämlich AP, heißt der **Quersinus** (sinus versus) von eben diesem Bogen und Winkel.

§. 10.

Wollte man also die Tangente und Secante eines Bogens von 90° z. E. des Bogens TN (Fig. 110.) beschreiben, so müßte man, vermöge der vorigen Definition, an den Puncte T eine senkrechte Linie errichten und den Halbmesser NC verlängern, bis diese senkrechte Linie dadurch geschnitten würde. Weil aber der Winkel TCN in diesem Falle, indem er durch den Bogen TN gemessen wird, ein rechter Winkel ist, und folglich NC auf TC senkrecht stehet, so müssen die Linie PT und NC unter sich parallel seyn (§. 63. Geom.). Es läßt sich also für einen Bogen oder Winkel von 90 Graden weder eine Tangente noch eine Secante bestimmen, oder in der Sprache der Mathematiker zu reden, die Tangente und Secante eines Bogens von 90 Graden ist unendlich groß.

§. 11.

Denjenigen Theil, welchen man zu einem Bogen, der noch nicht 90 Grad beträgt, hinzusetzen muß, damit 90 Grad voll werden, nennt man das **Complement** oder die **Ergänzung** desselben Bogens, und auf eben die Art heißt ein spitziger Winkel, den man zu einem andern spitzigen Winkel setzen muß, um einen rechten Winkel zu erhalten, der **Complements- oder Ergänzungs-Winkel** von

diesem (angulus complementi). Wenn also NC (Fig. 110.) senkrecht auf TC stehet, so ist der Bogen QN das Complement von dem Bogen TQ, und umgewendet TQ, das Complement von QN; ingleichen e der Complements-Winkel von o, und o wieder der Complements-Winkel von e. Will man also den Complements-Winkel von einem gegebenen Winkel haben, so darf man ihn nur von 90 Grad abziehen. Wäre also von einem Winkel von 40° die Rede, so würde sein Complements-Winkel 90° — 40° d. i. 50 Grad seyn. In einem rechtwinklichten Triangel sind daher die beyden spitzigen Winkel, weil sie zusammen 90 ausmachen, Complements-Winkel von einander.

§. 12.

Der Sinus eines Complements-Winkels und also auch der Sinus eines Complements-Bogens wird der Kürze halber **Cosinus**; die Tangente eines Complements-Winkels oder Bogens **Cotangente**, und die Secante eines Complements-Winkels oder Bogens **Cosecante** genannt. Die Cosinus deutet man durch cos. die Cotangenten durch cot. und die Cosecanten durch cosec. an.

§. 13.

Wenn o (Fig. 110.) der Complements-Winkel von e ist; so muß der Sinus des Winkels o, nämlich QS, der Cosinus von e, und der Sinus des Winkels e, nämlich QR, der Cosinus des Winkels o seyn. Weil aber die vierseitige Figur CRQS, vermöge der Construction, ein Parallelogram ist, folglich

QS

$$\left.\begin{matrix} QS = RC \\ QR = SC \end{matrix}\right) \text{ (§. 93. Geom.)}$$

so kann man auch RC für den Sinum des Winkels o, oder für den Cosinum des Winkels e, und SC für den Sinum des Winkels e, oder für den Cosinum des Winkels o halten. Hieraus läßt sich also folgender Satz einsehen: **Der Cosinus ist derjenige Theil des Halbmessers, der sich zwischen dem Sinus und dem Mittelpuncte befindet.**

§. 14.

Lehrsatz. **Die Sinus, ingleichen die Tangenten und Secanten solcher Bogen, die aus der Spitze eines Winkels innerhalb seiner Schenkel beschrieben werden, haben gegen die Halbmesser dieser Bogen einerley Verhältnis.**

Es sey (Fig. 111. Tab. 12.) aus der Spitze des Winkels ARB der Bogen SD mit dem Halbmesser DR = SR und der Bogen CB mit dem Halbmesser BR = CR beschrieben; so verhält sich

Sin. SD : SR = Sin. CB : CR
Ferner Tang. SD : DR = Tang. CB : BR
und Sec. SD : DR = Sec. CB : BR

Beweis.

Man ziehe aus dem Puncte S die gerade Linie SQ senkrecht auf dem Halbmesser DR, und aus dem Puncte C die Linie CD senkrecht auf den Halbmesser BR; so ist

$$\left.\begin{matrix} SQ = \text{Sin. SD} \\ CD = \text{Sin. CB} \end{matrix}\right) \text{ (§. 5.)}$$

Weil nun also, vermöge der Construction, sowohl der Winkel SQR, als auch der Winkel CDR, ein rechter Winkel, und der Winkel bey R den beyden Triangeln SQR und CDR gemein ist; so müssen die beyden Triangel einander ähnlich seyn. Folglich

SQ : SR = CD : CR (§. 145. Geom.)
SQ = Sin. SD und CD = Sin. CB

Sin. SD : SR = Sin. CB : CR (§. 9. Ar.)

Auf eben die Art läßt sich auch beweisen, daß die Tangenten, ingleichen die Secanten dieser Bogen gegen ihre Halbmesser einerley Verhältnis haben. Denn man ziehe CD senkrecht auf den Endpunct des Halbmessers DR und AB senkrecht auf den Endpunct des Halbmessers BR, so ist

CD = Tang. SD
AB = Tang. CB
CR = Sec. SD
AR = Sec. CB
} (§. 9.)

Weil nun in den Triangeln CDR und ABR ebenfalls zwey Winkel von einerley Grösse vorkommen; so müssen auch diese beyden Triangel einander ähnlich seyn, und daher erstlich

CD : DR = AB : BR (§. 145. Geom.)
CD = Tang. SD und AB = Tang. CB

Tang. SD : DR = Tang. CB : BR

ingleichen

CR : DR = AR : BR (§. 145. Geom.)
CR = Sec. SD und AR = Sec. CB

Sec. SD : DR = Sec. CB : BR (§. 9. Ar.)

§. 15.

Wenn man also einen jeden Halbmesser, er mag groß oder klein seyn, in gleich viel Theile theilet; so müssen auch die Sinus, ingleichen die Secanten und Tangenten, die zu einerley Winkel gehören, man mag sich nun dieselben im Kleinen oder im Grossen vorstellen, eine gleiche Anzahl von diesen Theilen erhalten. Man hat daher den Halbmesser in den gewöhnlichen Tafeln in 10000000 und in den grössern in 10000000000 eingetheilet, und durch mühsame Rechnungen untersuchet, wie viel solcher Theile auf die Sinus, Tangenten und Secanten der spitzigen Winkel gehen; weil die stumpfen Winkel eben die Sinus, Tangenten und Secanten haben, als die spitzigen, die mit ihnen 180 Grad ausmachen. Damit auch Anfänger die Möglichkeit einsehen, wie dergleichen Tafeln haben berechnet werden können, so will ich erst noch folgende Betrachtungen anstellen, ehe ich zu den übrigen Sätzen der Trigonometrie fortgehe.

§. 16.

Es sey (Fig. 112.) die Linie BF die Seite eines regulären Sechsecks, und folglich so groß, als der Radius BN (§. 116. Geom.), so muß der Bogen BDF, wovon BF eine Sehne ist, den sechsten Theil der Peripherie, d. i. 60 Grad betragen. Man ziehe aus dem Mittelpuncte N die senkrechte Linie ND, so ist

$$\left.\begin{array}{l} BC = \frac{1}{2} BF \\ \text{Bog. } BD = \frac{1}{2} \text{ Bog. } BDF \end{array}\right) \text{(§. 111. Geom.)}$$

Da nun BC der Sinus des Bogens BD (§. 5.) d. h. eines Bogens von 30 Grad ist; so läßt sich derselbe finden, wenn man den Halbmesser halbirt. Gäbe man also dem Halbmesser 100 Theile, so würde der Sinus eines Bogens oder Winkels von 30 Graden 50 Theile haben. In den gewöhnlichen Tafeln hat man dem Halbmesser 10000000 Theile zugeeignet, daher der Sinus eines Bogens von 30 Graden durch die Zahl 5000000 ausgedrückt wird. Ist der Sinus eines Winkels bekannt; so läßt sich sein Cosinus finden, wenn man das Quadrat des Sinus von dem Quadrate des Halbmessers subtrahiret und aus dem Ueberreste die Quadratwurzel ziehet. Denn in dem rechtwinklichten Triangel BNC ist die Hypotenuse BN der Halbmesser, der Catheτus BC der Sinus, und der Catheτus NC der Cosinus des Bogens BD (§. 13.), folglich

$$BN^2 = NC^2 + BC^2 \quad (\S.\ 103.\ Geom.)$$

$$BN^2 - BC^2 = NC^2 \quad (\S.\ 14.\ Ar.)$$

$$\sqrt{(BN^2 - BC^2)} = NC$$

Hat man nun den Cosinus eines Winkels von 30 Grad berechnet, so hat man zugleich den Sinum eines Winkels von 60 Grad gefunden (§. 11. 12.).

§. 17.

Wenn man CN (Fig. 112.) von ND wegnimmt, so bleibt CD übrig. CD aber ist der Quersinus des Bo-

Bogens BD (§. 9.), NC sein Cosinus, wie schon vorhin bemerkt worden ist, und ND der Halbmesser. Man erhält also den Quersinum eines Bogens oder Winkels, wenn man desselben Cosinum von dem Halbmesser subtrahirt.

§. 18.

Aus dem Sinu und Quersinu eines Winkels läßt sich der Sinus eines andern Winkels finden, der halb so groß ist, wenn man das Quadrat des Sinus zu dem Quadrate des Quersinus addirt, aus dieser Summe die Quadratwurzel ziehet und davon die Hälfte nimmt. Denn man ziehe (Fig. 112.) die Sehne BD, so muß die Hälfte davon der Sinus von der Hälfte des Bogens BD seyn (§. 6.). Es ist aber

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 \quad (\S.\ 103.\ Geom.)$$

$$BD = r\,(BC^2 + CD^2)$$

$$\tfrac{1}{2}BD = \tfrac{1}{2}r\,(BC^2 + CD^2)$$

Hieraus erhellet also, wie man den Sinum eines Winkels von 15 Grad berechnen könne, wenn man den Sinum eines Winkels von 30 Grad gefunden, und wie ferner aus dem Sinu eines Winkels von 15 Grad der Sinus eines Winkels von $7\frac{1}{2}$ Grad u. s. f. zu finden sey.

§. 19.

Es sey (Fig. 112.) der Halbmesser BN senkrecht auf dem Halbmesser SN, und also BS die Seite ei-

nes Quadrats, das sich in dem Cirkel wovon BN und SN Halbmesser sind, beschreiben läßt; so ist, wenn aus dem Mittelpuncte N die Linie NA senkrecht auf BS gezogen wird,

$$\left.\begin{array}{rcl} BG & = & \frac{1}{2}\ BS \\ \text{Bog. } BA & = & \frac{1}{2}\ \text{Bog. } BAS \end{array}\right) \text{(§. 111. Geom.)}$$

Da nun der ganze Bogen BAS 90° beträgt; so muß der halbe Bogen BA, dessen Sinus BG ist, 45° ausmachen. Nun ist

$$BS^2 = BN^2 + SN^2 \text{ (§. 103. Geom.)}$$
$$BN^2 = SN^2$$
$$BS^2 = 2\,BN^2$$
$$BS = \sqrt{2\,BN^2}$$
$$\tfrac{1}{2}\,BS = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,BN^2}$$
$$\tfrac{1}{2}\,BS = BG \text{ (§. 111. Geom.)}$$
$$BG = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,PN^2}$$
$$BG = \text{Sin. } 45°$$
$$\text{Sin. } 45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,BN^2}$$

d. h. weil BN der Radius des Cirkels ist: man findet den Sinum eines Winkels von 45 Grad, wenn man das Quadrat des Halbmessers durch 2 multipliciret, aus diesem Producte

die

die Quadratwurzel ziehet, und davon die Hälfte nimmt. Aus dem Sinu eines Winkels von 45 Graden findet man den Sinum eines Winkels von 22°, 30′, und aus diesen wieder den Sinum eines Winkels von 11°, 15′ u. s. f. wie aus dem vorhergehenden §. erhellet.

§. 20.

Diese Betrachtungen werden hinlänglich seyn, Anfängern einigermassen die Möglichkeit begreiflich zu machen, wie die Sinus der Winkel haben ausgerechnet werden können. Setzt man nun die Berechnung der Sinus und Cosinus voraus, so ist leicht einzusehen, wie sich auch die Tangenten und Secanten berechnen lassen. Denn es sey (Fig. 109.)

NP = Sin. o
PC = Cos. o
AC = ND = Sin. Tot.
TA = Tang. o
TC = Sec. o

so müssen die beyden Triangel NPC und TAC wegen des gemeinschaftlichen Winkels o und der rechten Winkel bey P und A einander ähnlich seyn. Folglich

PC : NP = AC : TA (§. 145. Geom.)

d. i. Cos. o : Sin. o = Sin. Tot. : Tang. o

$$\text{Tang. o} = \frac{\text{Sin. o} \times \text{Sin. Tot.}}{\text{Cos. o}} \quad (\text{§. 112. Ar.})$$

Fer

Ferner

$$NP : NC = TA : TC \quad (\S.\ 145.\ Geom.)$$

d. i. $$Sin.\ o : Sin.\ Tot. = Tang.\ o : Sec.\ o$$

$$Sec.\ o = \frac{Tang.\ o \times Sin.\ Tot.}{Sin.\ o}$$

Man findet also die Tangente eines Winkels, wenn man seinen Sinum durch den Sinum Totum, d. h. durch den Halbmesser multiplicirt, und dieses Product durch seinem Cosinum dividiret. Hat man die Tangente berechnet, so findet man die Secante, wenn man die Tangente durch den Halbmesser multiplicirt, und das Product durch den Sinum dividiret.

§. 21.

Wenn man sich nun der gewöhnlichen Tafeln, in welchen nicht nur die Sinus, Tangenten und Secanten, sondern auch ihre Logarithmen enthalten sind, bedienen will; so muß man noch folgendes merken. Es sind allemal 2 Winkel, die zusammen 90 Grad ausmachen, in einer Reihe einander gegenüber gesetzt worden. Verlangt man nun den Cosinum, Cotangenten oder Cosecanten eines Winkels, so suche man diesen Winkel auf, und nehme den Sinum, Tangenten oder Secanten des andern Winkels, der mit diesem sich in einer Reihe befindet. Z. E. wollte man den Cosinum von 24°, 30′ aus dem Vlacqschen Tabellen haben; so dürfte man nur diesen Winkel

kel aufsuchen, und den Sinum des Winkels auf der andern Seite in eben der Zeile nehmen, wo 65°, 30′, d. i. der Complements-Winkel von 24°, 30′ stehet. Weil ferner die stumpfen Winkel einerley Sinus, Tangenten und Secanten mit den spitzigen haben, die mit ihnen zusammen 180 Grad ausmachen; so hat man die stumpfen Winkel weggelassen. Verlangt man also den Sinum eines solchen Winkels, so subtrahire man denselben von 180°, und suche von dem Ueberreste den Sinum. So würde also der Sinus von 120° eben so viel betragen, als der Sinus von 60°, weil 180° — 120° = 60° (§. 7.). Auf eben die Art erhält man auch die Tangenten und Secanten der stumpfen Winkel. Uebrigens ist in Ansehung der verschiedenen Ausgaben der Sinus-Tabellen zu merken, daß diejenige für die beste gehalten wird, welche Gardiner zu London 1742 in 4. herausgegeben hat, und worinnen man zugleich die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 102100 antrift. Weil sich diese Tabellen aber schon sehr selten gemacht haben, und daher sehr theuer bezahlt werden müssen, so hat ein gelehrter Jesuite zu Avignon 1770 eine neue Auflage davon besorgt, und die englische Anleitung zum Gebrauch der Tabellen, die sich bey der Londner Ausgabe befindet, in das französische übersetzt. Vor einigen Jahren haben wir auch endlich in Deutschland eine vortrefliche Sammlung trigonometrischer, logarithmischer und anderer nützlichen Tafeln erhalten, die ein Mitglied der Königl. Preuß. Academie der Wissenschaften zu Berlin unter folgendem Titel in 3 Octav-Bänden herausgegeben hat: **Joh. Carl Schulze neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer**

scher und andrer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln. Unter den kleinern Editionen ist die Vlacquische, welche zu Haag 1665 herausgekommen, die beste, weil sie die wenigsten Druckfehler enthält. Es ist aber in den grössern Tabellen, wie schon oben bemerkt worden ist, der Sinus Totus oder Halbmesser = 10000000000 angenommen worden, daher sein Logarithmus = 10. 0000000000. In den kleinern Tafeln aber hat man denselben, und daher auch alle übrigen trigonometrischen Linien um 3 Zifern verkürzt, aber die Logarithmen behalten; daher es kömmt, daß alle Kennzifern der Logarithmen, die zu den Sinus und Tangenten gehören, um 3 Einheiten zu groß sind, weil sie eigentlich die Logarithmen solcher Zahlen sind, die 3 Zifern mehr enthalten. Dieser Umstand aber verursacht nicht den geringsten Fehler im Rechnen, weil man sich der Zahlen selbst, welche die Sinus und Tangenten ausdrücken, gar nicht bedient, wenn man einmal mit den Logarithmen rechnet.

§. 22.

Lehrsatz. In einem rechtwinklichten Triangel verhält sich die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, zu einer anliegenden Seite, wie der *Sinus Totus* zu dem Sinus des gegenüberstehenden, oder zu dem Cosinus des anliegenden Winkels.

Es sey ADB (Fig. 114. Tab. 12.) ein rechtwinklichter Triangel, so verhält sich

AB : AD = Sin. Tot. : Sin. B
oder AE : AD = Sin. Tot. : Cos. A

Ferner

AB : DB = Sin. Tot. : Sin. A
oder AB : DB = Sin. Tot. : Col. B

Beweis.

Man beschreibe mit der Seite AB, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, einen Cirkel oder nur einen Cirkelbogen, so ist, vermöge der Construction und der angenommenen Bedingung, daß ADB ein rechter Winkel seyn soll,

AB = Sin. Tot. (§. 8.)
AD = Sin. B = Cos. A (§. 5. 11. 12.)

AB : AD = Sin. Tot. : Sin. B
AB : AD = Sin. Tot. : Cos. A) (§. 9. Ar.)

Auf eben diese Art ist auch klar, daß

AB : DB = Sin. Tot. : Sin. A
oder AB : DB = Sin. Tot. : Cos. B

weil DB als der Cosinus von B, auch der Sinus von A seyn muß (§. 13.).

§. 23.

Weil in dem vorigen Triangel, wenn BA der Halbmesser oder Sinus Totus ist,

DB = Cos. B (§. 13.)
AD = Sin. B

DB : AD = Cos. B : Sin. B (§. 9. Ar.)

d. h. in einem rechtwinklichten Triangel verhält sich der eine Cathetus zu dem andern, wie der Cosinus des spitzigen Winkels, welcher an dem ersten Catheto liegt, zu dem Sinu desselben Winkels.

§. 24.

Lehrsatz. In einem rechtwinklichten Triangel verhält sich der *Sinus Totus* zu der Tangente eines spitzigen Winkels, wie der Cathetus, der an diesem Winkel lieget, zu dem gegenüberstehenden Catheto.

Es sey in dem Triangel ADB (Fig. 114.) bey D ein rechter Winkel, so verhält sich

Sin. Tot. : Tang. B = DB : AD

Beweis.

Man beschreibe mit dem Catheto DB, an welchem der Winkel B lieget, einen Bogen; so ist, weil DB alsdenn den Halbmesser vorstellt,

Sin. Tot. = DB (§. 8.)
Tang. B = AD (§. 9.)

Sin. Tot. : Tang. B = DB : AD

§. 25.

Weil B der Complements-Winkel von A ist (§. 11.), so ist auch

Tang. B = Cot. A (§. 12.)

Folglich Sin. Tot. : Cot. A = DB : AD (§. 9. Ar.)

d. h.

d. h. in einem rechtwinklichten Triangel verhält sich auch der *Sinus Totus* zu dem Cotangenten eines spitzigen Winkels, wie der gegenüberstehende Cathetus zu dem anliegenden.

§. 26.

Lehrsatz. In einem jeden geradelinichten Triangel verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Vergleicht man z. E. in dem Triangel AMP (Fig. 113. Tab. 12.) die Seiten AM und PM mit einander, so verhält sich

$$AM : MP = \text{Sin. } P : \text{Sin. } A$$

Beweis.

Weil sich durch jede drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ein Cirkel beschreiben läßt (§. 90. Geom.), so ist klar, daß man um jeden geradelinichten Triangel einen Cirkel beschreiben kann. Stellt man sich nun einen Cirkel vor, dessen Peripherie durch die Ecken des Triangels AMP gehet, so müssen die Seiten desselben Sehnen des Cirkels, und die Winkel Peripherie-Winkel werden. Zieht man ferner aus dem Mittelpuncte C die senkrechten Linien CD und CR, so ist

$$\left.\begin{array}{rcll} AB &=& \frac{1}{2} & AM \\ AD &=& \frac{1}{2} & ADM \\ MG &=& \frac{1}{2} & MP \\ MR &=& \frac{1}{2} & MRP \end{array}\right\} \text{(§. 111. Geom.)}$$

Weil nun die Winkel P und A Peripherie-Winkel sind, und daher eben so viel Grade enthalten müssen, als die Hälften der Bogen, auf welchen sie stehen, so ist

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{1}{2} ADM = AD \\ A = \frac{1}{2} MRP = MR \end{array}\right\} (\S.\ 83.\ Geom.)$$

woraus ferner erhellet, daß der Sinus des Winkels P dem Sinus des Bogens AD, und der Sinus des Winkels A, dem Sinus des Bogens MR gleich seyn muß. Nun verhält sich aber

$$AM : MP = \frac{1}{2} AM : \frac{1}{2} MP \quad (\S.\ 103.\ Ar.)$$

$$AB = \frac{1}{2} AM \text{ und } MG = \frac{1}{2} MP$$

$$AM : MP = AB : MG \quad (\S.\ 9.\ Ar.)$$

$$AB = \text{Sin. } AD \text{ und } MG = \text{Sin. } MR \quad (\S.\ 6.)$$

$$AM : MP = \text{Sin. } AD : \text{Sin. } MR$$

$$\text{Sin. } AD = \text{Sin. } P \text{ und Sin. } MR = \text{Sin. } A$$

$$AM : MP = \text{Sin. } P : \text{Sin. } A$$

Auf eben die Art läßt sich auch beweisen, daß die Seite AM zu der Seite AP sich verhält, wie der Sinus des Winkels P zu dem Sinu des Winkels M, und MP zu AP wie der Sinus des Winkels A zu dem Sinu des Winkels M.

§. 27.

Man kann den vorigen Satz auch so ausdrücken: Es verhält sich eine jede Seite zu dem Sinus des

des gegenüberstehenden Winkels, wie eine andere Seite zu dem Sinus des gegenüberstehenden Winkels. Denn aus der Proportion

$$AM : MP = \text{Sin. } P : \text{Sin. } A$$

folgt alternando diese

$$AM : \text{Sin. } P = MP : \text{Sin. } A \text{ (§. 100. Ar.)}$$

§. 28.

Lehrsatz. In einem jeden geradelinichten Triangel verhält sich die Summe zweyer Seiten zu ihrem Unterschiede, wie die Tangente von der halben Summe der beyden Winkel, welche diesen Seiten gegenüber stehen, zu der Tangente von dem halben Unterschiede eben dieser Winkel.

Es sey, zum Beyspiele, ANQ (Fig. 115.) ein geradelinichter Triangel, so verhält sich

$$AQ + AN : AQ - AN = \text{T. } \tfrac{1}{2}(ANQ + AQN) : \text{T. } \tfrac{1}{2}(ANQ - AQN)$$

Beweis.

Man trage die kleinste von den beyden Seiten von welchen die Rede ist, nämlich AN auf die andere Seite AQ, mache also AR = AN, und verlängere AQ, bis BA ebenfalls so groß, als AN wird; so ist, vermöge der Construction,

$$BQ = AQ + BA = AQ + AN$$
$$RQ = AQ - AR = AQ - AN$$

Die Puncte N und R verbinde man durch eine gerade Linie; aus dem Puncte Q ziehe man die Linie CQ parallel mit der Linie NR, und durch die Puncte B und N ziehe man eine andre gerade Linie bis an die Parallellinie CQ; so muß der Winkel BNR, und folglich auch C, eine rechter Winkel seyn. Denn weil vermöge der Construction, BA = AN = AR; so könnte man mit dem Halbmesser BA aus dem Puncte A einen Cirkel beschreiben, welcher durch die Puncte B, N und R gienge. Alsdenn würde BR der Diameter des Cirkels, und BNR ein Winkel an der Peripherie werden, der auf dem Endpuncte eines Diameters stünde, woraus also erhellet, daß der Winkel BNR ein rechter Winkel ist (§. 84. Geom.). Und weil CQ parallel mit NR gezogen worden, so muß C so groß als < BNR, folglich auch ein rechter Winkel (§. 65. Geom.) und daher die Triangel BCQ und NCQ rechtwinklichte Triangel seyn. Weil nun ferner, vermöge der Construction, AN = AR, so sind die Winkel ANR und ARN einander gleich (§. 74. Geom.) und daher ANR + ARN = 2 ARN. Es ist aber

ANR + ARN = 180° — NAR (§. 70. Geom.)

2 ARN = 180° — NAR (§. 11. Ar.)

ANQ + AQN = 180 — NAR (§. 70. Geom.)

2 ARN = ANQ + AQN (§. 11. Ar.)

$$\frac{2\,ARN}{2} = \frac{ANQ + AQN}{2}$$ (§. 18. Ar.)

d. i. ARN $= \frac{1}{2}$ (ANQ + AQN)

BQC = ARN (§. 65. Geom.)

BQC $= \frac{1}{2}$ (ANQ + AQN) (§. 11. Ar.)

oder BQC $= \frac{1}{2}$ ANQ + $\frac{1}{2}$ AQN

AQN = AQN

BQC — AQN $= \frac{1}{2}$ ANQ + $\frac{1}{2}$ AQN — AQN (§. 14. Ar.)

d. i. BQC — AQN $= \frac{1}{2}$ ANQ — $\frac{1}{2}$ AQN (§. 30. Ar.)

oder BQC — AQN $= \frac{1}{2}$ (ANQ — AQN)

BQC — AQN = NQC

NQC $= \frac{1}{2}$ (ANQ — AQN) (§. 11. Ar)

Weil also der Winkel BQC so groß ist, als $\frac{1}{2}$ (ANQ + AQN) so ist auch die Tangente von BQC so groß, als die Tangente von $\frac{1}{2}$ (ANQ + AQN) und weil NQC $= \frac{1}{2}$ (ANQ — AQN) so muß auch die Tangente von NQC der Tangente von $\frac{1}{2}$ (ANQ — AQN) gleich seyn. Nun verhält sich in dem rechtwinklichten Triangel BCQ

CQ : BC = Sin. Tot. : Tang. BQC (§. 24.)

CQ : Sin. Tot. = BC : Tang. BQC (§. 100. Ar.)

und in dem rechtwinklichten Triangel NCQ

CQ : NC = Sin. Tot. : Tang. NQC (§. 24.)

CQ : Sin. Tot. = NC : Tang. NQC (§. 100. Ar.)

BC : Tang. BQC = NC : Tang. NQC (§. 11. Ar.)

BC : NC = Tang. BQC : Tang. NQC (§. 100. Ar.)

BQ : RQ = BC : NC (§. 143. Geom.)

BQ : RQ = Tang. BQC : Tang. NQC (§. 11. Ar.)

T. $\frac{1}{2}$ (ANQ + AQN) = T. BQC

T. $\frac{1}{2}$ (ANQ — AQN) = T. NQC

BQ : RQ = T. $\frac{1}{2}$ (AMQ + AQN) :

T. $\frac{1}{2}$ (ANQ — AQN) (§. 9. Ar.)

BQ = AQ + AN und RQ = AQ — AN

AQ + AN : AQ — AN = T. $\frac{1}{2}$ (ANQ) + AQN) :

T. $\frac{1}{2}$ (ANQ — AQN) (§. 9. Ar.)

§. 29.

Lehrsatz. **Wenn man in einem ungleichseitigen Triangel mit der kleinsten Seite aus der Spitze desjenigen Winkels, welcher der größten Seite gegenüber stehet, einen Cirkel beschreibet, so verhält sich die größte Seite zu der Summe der übrigen beyden Seiten,**

wie

wie der Unterschied dieser beyden Seiten zu demjenigen Theile der grösten Seite, welcher sich ausserhalb des Cirkels befindet.

Es sey mit der kleinsten Seite CP des Triangels QCP (Fig. 116. Tab. 12.) aus der Spitze C, welcher der grösten Seite QP gegenüber stehet, ein Cirkel beschrieben, so verhält sich

$$QP : QC + CP = QC - CP : QS$$

Beweis.

Man verlängere die Seite QC bis an die Peripherie, so ist, weil $CP = CN = CD$ (§. 29. Geom.):

$$QN = QC + CN = QC + CP$$
$$QD = QC - CD = QC - CP$$

Es verhält sich aber

$$QP : QN = QD : QS \quad \text{(§. 156. Geom.)}$$

$$QP : QC + CN = QC - CD : QS \text{ (§. 9. Ar.)}$$

Zweytes Capitel.

Von der Ausrechnung der Triangel.

§. 30.

Bey der Berechnung der Triangel, mit welcher wir uns jetzt beschäftigen wollen, kömmt alles darauf an, daß man sich aus den jetzt erklärten Lehrsätzen

sätzen denjenigen erwählt, durch welchen man aus den bekannt gemachten Theilen eines Triangels eine Proportion mit drey bekannten Gliedern erhält, damit man alsdenn die unbekannte Grösse, die sich allemal durch Versetzung der Glieder zum vierten Gliede machen läßt, durch Hülfe der Regel Detri oder der Logarithmen finden kann. Es versteht sich aber von selbst, daß man zu dergleichen Rechnungen allemal so viel von einem Triangel wissen muß, als zu der Bestimmung desselben nöthig ist; nämlich entweder eine Seite und zwey Winkel, oder zwey Seiten und einen Winkel, oder alle Seiten. Aus den gegebenen drey Winkeln eines Triangels läßt sich nicht die Grösse, sondern nur das Verhältniß der Seiten berechnen; weil eine unendliche Menge Triangel von verschiedner Grösse möglich sind, die eben dieselben Winkel haben. Um die Weitläuftigkeit zu vermeiden, und meine jungen Leser mit den Logarithmen desto bekannter zu machen, will ich alles durch Hülfe der Logarithmen berechnen.

Berechnung der rechtwinklichten Triangel.

§. 31.

Aufgabe. *Es wird in einem rechtwinklichten Triangel ein Cathetus und der anliegende spitzige Winkel gegeben, man soll daraus das übrige finden.*

Auf-

Auflösung.

Es sey z. B. in dem rechtwinklichten Triangel ADB (Fig. 114. Tab. 12.) die Seite DB und der Winkel B gegeben, so findet man erstlich den Winkel A, wenn man B von 90 Grad subtrahirt (§. 11.), und die Seite AB, wenn man also schließt:

Cos. B : Sin. Tot. = DB : AB (§. 22.)

$$AB = \frac{\text{Sin. Tot.} \times DB}{\text{Cos. B}} \quad (\text{§. 112. Ar.})$$

$$\log. AB = \log. \text{Sin. Tot.} + \log. DB - \log. \text{Cos. B} \quad (\text{§. 125. Ar.})$$

Die Seite AD wird gefunden, wenn man entweder schließt:

Cos. B : Sin. B = DB : AD (§. 23.)

$$AD = \frac{\text{Sin. B} \times DB}{\text{Cos. B}} \quad (\text{§. 112. Ar.})$$

$$\log. AD = \log. \text{Sin. B} + \log. DB - \log. \text{Cos. B} \quad (\text{§. 125. Ar.})$$

oder

Sin. Tot. : Tang. B = DB : AD (§. 24.)

$$AD = \frac{\text{Tang. B} \times DB}{\text{Sin. Tot.}}$$

$$\log. AD = \log. \text{Tang. B} + \log. BD - \log. \text{Sin. Tot.}$$

Exempel.

Es sey die Seite DB = 25 Ruthen
und der Winkel B = 50° 20′

so ist der Winkel A = 90° — 50°, 20′ = 39°, 40′
die Seite $AB = \frac{\text{Sin. Tot.} \times 25}{\text{Cos. } 50°, 20'}$

$\log. AB = \log. \text{Sin. Tot.} + \log. 25 - \log. \text{Cos. } 50°, 20'$

Es ist aber vermöge der Tabellen

log. Sin. Tot. = 10. 0000000 *)
log. 25 = 1. 3979400 add.

11. 3979400
log. Cos. 50° 20' = 9. 8050385 subtr.

log. AB = 1. 5929015

Sucht man nun diesen Logarithmum unter den Logarithmen der gewöhnlichen Zahlen auf, so findet man ihn nicht völlig, sondern nur ein Paar andere, zwischen welche er fällt. Nämlich der nächst kleinere ist

1. 5910646 = log. 39

und der nächst grössere

1. 6020600 = log. 40

Der gefundene Logarithmus 1. 5929015 muß also zu einer Zahl gehören, die grösser als 39 und kleiner als 40 ist, und daher muß die Seite AB ausser 39 Ruthen noch einige Schuh oder Zolle enthalten. Wollte man also diese noch wissen, so dürfte man nur den gefundenen Logarithmum, weil seine Kennzifer nur 1 ist, unter einer grössern, z. E. unter der Kennzifer 3 aufsuchen. Es ist aber der nächst kleinere unter dieser Kennzifer

*) Man erinnere sich, daß der Sinus Totus der Sinus eines Winkels von 90 Graden ist. In den Tabellen findet man ihn, wenn man den Sinum von 89 Gr. 60 Minuten sucht.

3. 5928427 = log. 3916

und der nächst grössere

3. 5929536 = log. 3917

Wenn man nun aus der Kennzifer dieser beyden Logarithmen 2 Einheiten wegnimmt, um sie dem gefundenen gleicher zu machen, so müssen bey den darzu gehörigen Zahlen 2 Zifern rechter Hand Decimal-Brüche werden. Folglich

1. 5928427 = log. 39, 16
1. 5929536 = log. 39, 17) (§. 133. Ar.)

Weil nun der gefundene Logarithmus zwischen diese beyde Logarithmen fällt, so muß auch die dazu gehörige Zahl zwischen die Zahlen 39, 16 und 39, 17 fallen, d. h. die Seite AB muß grösser seyn, als $39\frac{16}{100}$ Ruthen, d. i. als 39 Ruthen, 1 Schuh und 6 Zoll, aber kleiner als $39\frac{17}{100}$ Ruthen, d. i. kleiner als 39 Ruthen 1 Schuh und 7 Zoll. Wollte man nun auch damit noch nicht zufrieden seyn, daß man die Schuh und Zolle gefunden, welche die Seite AB ausser den 39 Ruthen enthält, so müßte man, weil sich der Logarithmus in den kleinen Tabellen, die wir hier nur voraus setzen können, unter keiner grössern Kennzifer mehr aufsuchen läßt, den Satz anwenden, daß sich der Unterschied der Zahlen beynahe wie der Unterschied der Logarithmen verhält (§. 134. Ar.). Dieses könnte hier auf folgende Art geschehen.

I. 5929536 = log. 39°, 1', 7''
I. 5928427 = log. 39°, 1', 6''

Unterschied = 1109 | Unterschied 1'' = 10'''

I. 5929015 = log. AB
I. 5928427 = log. 39°, 1', 6''

Unterschied = 588 | Unterschied = x

1109 : 588 = 10''' : x (S. 134 Ar.)

10

1109) 5880 | 5'''
5545 |

335

$+ \frac{335}{1109} = x$

Setzt man diesen Unterschied zu 39°, 1' 6'', so erhält man die eigentliche Grösse der Seite AB, welche nämlich 39 Ruthen, 1 Schuh, 6 Zoll und $5\frac{335}{1109}$ Linien beträgt. Diese grosse Genauigkeit aber wird selten verlangt, indem man sich gemeiniglich an Schuhen und Zollen begnügen läßt. Anfänger sollen nur aus diesem Beyspiele sehen, wie man sich der bisher erklärten Sätze in den Fällen bedienen könne, wo man auch die kleinsten Theile angeben soll.

Nun haben wir noch AD zu berechnen. Es war aber nach der ersten Proportion

log. AD = log. Sin. B + log. DB — log. Cos. B
d. i. = log. Sin. 50°, 20' + log. 25 — log. Cos. 50°, 20'

Vermöge der Tabellen ist

log. Sin. 50°, 20' = 9. 8863616
log. 25 = 1. 3979400 add.

11. 2843016
log. Cos. 50°, 20' = 9. 8050385 subtr.

log. AD = 1. 4792631

wel-

welchem der Logarithmus der Zahl 30 am nächsten kömmt. Sucht man ihn wieder unter der Kennzifer 3, so findet man die Zahl 3014, woraus sich also ergiebt, daß die Seite AD 30 Ruthen, 1 Schuh und 4 Zoll beträgt. Eben diese Zahl würde man erhalten, wenn man sich der andern Proportion bediente, nämlich

Sin. Tot. : Tang. B = DB : AD (§. 24.)

---

log. AD = log. Tang. B + log. DB — log. Sin. Tot.

log. Tang. B = log. T. 50°, 20′ = 10. 0813231

log. DB = log. 25 = 1. 3979400

11. 4792631

log. Sin. Tot. = 10. 0000000

log. AD = 1. 4792631

welcher Logarithmus mit dem vorigen völlig einerley ist, und daher ebenfalls die Zahl giebt, die durch die erste Proportion gefunden worden ist.

§. 32.

Wäre ausser der Seite DB nicht, wie in der vorigen Aufgabe, der anliegende Winkel B, sondern der gegenüberstehende A gegeben, so würden die Proportionen, die man zu der Rechnung nöthig hätte, folgende seyn:

Sin. A : Sin. Tot. = DB : AB (§. 22.)

Sin. A : Cos. A = DB : AD (§. 23.)

Oder

Oder

Sin. Tot. : Cot. A = DB : AD (§. 25.)

Diese Proportionen aber sind von den vorigen nicht verschieden, weil die Winkel A und B Complements-Winkel sind, und also

Sin. A = Cos. B

Sin. B = Cos. A

Cot. A = Tang. B

§. 33.

Eine Höhe also, wie AM (Fig. 84. Tab. 9.) mit welcher man sich auf einerley Ebene befindet, und zu deren untersten Endpuncte man in gerader Linie gehen kann, läßt sich trigonometrisch finden, wenn man die Standlinie CM nebst dem Winkel C mißt, und entweder also schließt

Cos. C : Sin. C = MC : AM

oder

Sin. Tot. : Tang. C = MC : AM

§. 34.

Aufgabe. Es wird die Hypotenuse und ein spitziger Winkel gegeben, man soll das übrige finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 114. Tab. 12.)

die Seite AB = 3916″

der Winkel A = 39°, 40′

so

so ist der Winkel B, als der Complements-Winkel von A = 90° — 39°, 40′, d. i. 50°, 20′

Sin. Tot. : Sin. A = AB : DB (§. 22.)
d. i. Sin. Tot. : Sin. 39°, 40′ = 3916″ : DB

---

log. DB = log. Sin. 39°, 40′ + log. 3916″ — log. Sin. Tot.

log. Sin. 39°, 40′	= 9. 8050385	
log. 3916	= 3. 5928427	add.
	13. 3978812	
log. Sin. Tot.	= 10. 0000000	subtr.
log. DB	= 3. 3978812	

Diesem Logarithmo kömmt in den Tabellen der Logarithmus der Zahl 2500 am nächsten, daher die gesuchte Seite DB 2500 Zoll oder 25 Ruthen enthalten muß. Daß aber die Zahl 2500 hier Zoll bedeutet, erkennt man aus der vorigen Proportion, in welcher AB durch Zoll ausgedrückt wird, daher auch die Zahl, welche man für DB findet, nichts anders als Zolle bedeuten kann.

Auf eine ähnliche Art wird der andere Cathetus AD gefunden. Denn

Sin. Tot. : Cos. A = AB : AD (§. 22.)
d. i. Sin. Tot. : Cos. 39°, 40′ = 3916″ : AD

---

log. AD = log. Cos. 39°, 40′ + log. 3916″ — log. Sin. Tot.

log. Cos. 39°, 40′	= 9. 8863616	
log. 3916	= 3. 5928427	
	13. 4792043	
log. Sin. Tot.	= 10. 0000000	
log. AD	= 3. 4792043	

Die-

Diesem Logarithmo kömmt in den Tabellen der Logarithmus von 3014 ziemlich nahe. Folglich beträgt die Seite AD so viel als 3014 Zoll, d. i. 30 Ruthen, 1 Schuh, 4 Zoll.

§. 35.

Aufgabe. Es wird die Hypotenuse und ein Cathetus gegeben, man soll daraus die beyden spitzigen Winkel und die dritte Seite finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 114.) AB = 3916″
AD = 3014″
so läßt sich der Winkel B folgendergestalt finden:

AB : AD = Sin. Tot. : Sin. B (§. 22.)
d. i. 3916″ : 3014″ = Sin. Tot. : Sin. B

log. Sin. B = log. 3014 + log. Sin. Tot. — log. 3916

log. 3014 = 3. 4791432
log. Sin. T. = 10. 0000000

13. 4791432
log. 3916 = 3. 5928427

log. Sin. B = 9. 8863005

Sucht man nun diesen Logarithmum unter den Logarithmen der Sinus, so findet man einen, der ihm ziemlich nahe kömmt, nämlich log. Sin. 50° 20′ =

9.

9. 8863616, woraus also erhellt, daß der gesuchte Winkel B 50° 20′, und folglich der Winkel A 39°, 40′ beträgt. Wäre nicht von einem rechtwinklichten Triangel die Rede, so würde dieser Schluß: **der gefundene Sinus von dem Winkel *B* ist der Sinus eines Winkels von 50°, 20′; folglich ist *B* selbst ein Winkel von 50°, 20′**, nicht richtig seyn, weil ein stumpfer Winkel von 129°, 40′ eben denselben Sinum hat (§. 7.). Man muß daher in dergleichen Fällen eigentlich so schliessen: entweder der spitzige Winkel selbst, der bey dem gefundnen Sinus stehet, oder ein stumpfer Winkel, der mit ihm 180 ausmacht, ist der gesuchte. Welches von beyden nun wahr sey, müssen die Umstände lehren. In einem rechtwinklichten Triangel ist kein stumpfer Winkel möglich, daher man hier schlechterdings den spitzigen nehmen muß, der bey dem gefundnen Sinus in den Tafeln stehet.

Durch Hülfe des Winkels B läßt sich nunmehr auch die Seite DB bestimmen. Denn

Sin. Tot. : Cos. B = AB : DB (§. 22.)

d. i. Sin. Tot. : Cos. 50°, 20′ = 3916″ : DB

log. DB = log. Cos. 50°, 20′ + log. 3916 — log. Sin. Tot.

log. Cos. 50°, 29′ = 9. 8050385
log. 3916 = 3. 5928427

13. 3978812

log. Sin. Tot. = 10. 0000000

log. DB = 3. 3978812

welchem der Logarithmus von 2500 nahe kömmt, woraus also erhellt, daß die gesuchte Seite DB = 2500″ = 25°.

Durch Hülfe des Pythagorischen Lehrsatzes könnte man auch DB finden, ohne erst den Winkel B zu suchen, und ohne trigonometrische Tabellen zu gebrauchen. Denn

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \quad (\S.\ 103.\ Geom.)$$

$$AB^2 - AD^2 = DB^2$$

$$\sqrt{(AB^2 - AD^2} = DB$$

d. h. die Seite DB wird gefunden, wenn man das Quadrat der Seite AD von dem Quadrate der Hypotenuse AB subtrahiret, und aus dem Ueberreste die Quadratwurzel ziehet.

§. 36.

Aufgabe. Aus den beyden gegebenen Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, die beyden spitzigen Winkel und die Hypotenuse zu finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 114.) die Seite AD = 3014″
die Seite DB = 2500″

so braucht man zur Berechnung des Winkels B folgende Proportion

DB

DB : AD = Sin. Tot. : Tang. B (§. 24.)
d. i. 2500 : 3014 = Sin. Tot. : Tang. B

log. Tang. B = log. 3014 + log. Sin. Tot. — log. 2500
log. 3014 = 3. 4791432
log. Sin. Tot. = 10. 0000000

13. 4791432
log. 2500 = 3. 3979400

log. Tang. B = 10. 0812032

Sucht man nun diesen Logarithmum unter den Logarithmen der Tangenten, so findet man folgenden, der ihm sehr nahe kömmt,

log. Tang. 50°, 20′ = 10. 0813231

man kann also hieraus schliessen, daß der Winkel B = 50°, 20′; weil ein stumpfer Winkel hier unmöglich ist.

Der andere Winkel A also ist = 90° — 50°, 20′
d. i. 39°, 40′,

Die Hypotenuse AB läßt sich nunmehr finden, wenn man schließt:

Sin. B : Sin. Tot. = AD : AB (§. 22.)
d. i. Sin. 50°, 20′ : Sin. Tot. = 3014 : AB

log. AB = log. Sin. Tot. + log. 3014 — log. Sin. 50°, 20′
log. Sin. Tot. = 10. 0000000
log. 3014 = 3. 4791432

13. 4791432
log. Sin. 50°, 20′ = 9. 8863616

log. AB = 3. 5927816

welchem der Logarithmus der Zahl 3916 sehr nahe kömmt; daher die Hypotenuse = 3916″ = 39°, 1′, 6″.

Durch den Pythagorischen Lehrsatz würde man die Hypotenuse ebenfalls finden können, ohne erst einen Winkel suchen zu dürfen. Denn

$$AD^2 + DB^2 = AB^2 \quad (\S.\ 103.\ \text{Geom.})$$

$$r\ (AD^2 + DB^2) = AB$$

D. h. man addiret die Quadrate der beyden gegebenen Seiten zusammen, und zieht aus der Summe die Quadratwurzel.

Berechnung der schiefwinklichten Triangel.

§. 37.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Winkeln und einer Seite das übrige zu finden.

Auflösung.

Es sey in dem Triangel QCB (Fig. 116.)

der Winkel Q = 32°
der Winkel P = 43°
die Seite QP = 156 Ruthen;

so findet man erstlich den dritten Winkel QCP, wenn man die Summe der beyden gegebenen von 180 Grad abziehet (§. 70. Geom). Folglich

< QCP

$\angle QCP = 180° - (32° + 43°) = 180° - 75° = 105°$
Die Seite QC erhält man durch folgende Proportion:

$$\text{Sin. QCP} : \text{QP} = \text{Sin. P} : \text{QC} \quad (\S.\ 26.\ 27.)$$

$$\text{QC} = \frac{\text{QP} \times \text{Sin. P}}{\text{Sin. QCP}}$$

$$\log. \text{QC} = \log. \text{QP} + \log. \text{Sin. P} - \log. \text{Sin. QCP}$$
d. i. $\log. \text{QC} = \log. 156 + \log. \text{Sin. } 43° - \log. \text{Sin. } 105°$

log.	156 =	2. 1931246
log. Sin.	43° =	9. 8337833
		12. 0269079
log. Sin.	105° = log. Sin. 75° =	9. 9849438 (§. 7. 21.)
log.	QC =	2. 0419641

welchem der Logarithmus von 110 am nächsten kömmt. Unter der Kennzifer 3 ist der Logarithmus von 1101 der nächste. Nimmt man nun diesen letztern, so beträgt Q so viel als 110,1 Ruthen, d. i. 110 Ruthen, 1 Schuh.

Auf eben die Art wird auch die dritte Seite CP berechnet. Denn

$$\text{Sin. QCP} : \text{QP} = \text{Sin. Q} : \text{CP} \quad (\S.\ 27.)$$
d. i. $\text{Sin. } 105° : 156 = \text{Sin. } 32° : \text{CP}$

$$\log. \text{CP} = \log. 156 + \log. \text{Sin. } 32° - \log. \text{Sin. } 105°$$

log.	156 =	2. 1931246
log. Sin.	32° =	9. 7242097
		11. 9173343
log. Sin.	105° = log. Sin. 75° =	9. 9849438
log.	CP =	1. 9323905

Dieser Logarithmus ist grösser, als der Logarithmus der Zahl 85, und kleiner als der Logarithmus der Zahl 86. Unter der Kennzifer 3 kömmt ihm der Logarithmus von 8558 sehr nahe; nimmt man nun 2 Einheiten von der Kennzifer 3 weg, so werden in der Zahl 8558 zwey Zifern Decimalbrüche (§. 133. Ar.); folglich enthält die Seite CP 85, 58 Ruthen, d. i. 85 Ruthen, 5 Schuh, 8 Zoll.

§. 38.

Durch Hülfe dieser Aufgabe läßt sich also die Entfernung zweyer Oerter, zu deren einem man nur kommen kann, trigonometrisch finden. Denn es stelle die Linie AB (Fig. 81. Tab. 7.) eine solche Entfernung vor; so findet man dieselbe, wenn man die Standlinie AN nebst den Winkeln x und A mißt, die Summe dieser beyden Winkel von 180° subtrahirt, wodurch man den Winkel B erhält, und hierauf also schließt:

$$\text{Sin. } B : AN = \text{Sin. } x : AB$$

§. 39.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten und dem Winkel, welcher der größten Seite gegenüber steht, die übrigen beyden Winkel und die dritte Seite zu finden.

Auflösung.

Es sey in dem Triangel QCP (Fig. 116. Tab. 12.)

die Seite CP = 1711′
die Seite CQ = 2202′
der Winkel P = 43°

so

so suche man erstlich den Winkel Q durch folgende Proportion:

CQ : Sin. P = CP : Sin. Q (§. 26. 27.)
d. i. 2202′ : Sin. 43° = 1711′ : Sin. Q

log. Sin. Q = log. Sin. 43° + log 1711′ — log. 2202

log. Sin. 43° = 9. 8337833
log. 1711′ = 3. 2332500
13. 0670333
log. 2202 = 3. 3428173
log. Sin. Q = 9. 7242160

Diesem Logarithmo kömmt unter den Logarithmen der Sinus folgender ziemlich nahe

9. 7242097 = log. Sin. 32°, 0′

Der Winkel Q muß also entweder 32 Grad, oder 180° — 32°, d. i. 148° Grad betragen. Wollte man nun 148° annehmen, so müßte einem grössern Winkel die kleinere Seite, und dem kleinern Winkel die grössere Seite gegenüber stehen können, welches eine Unmöglichkeit ist (§. 4.). Es ist also gewiß, daß Q ein Winkel von 32 Grad seyn muß, welches man auch daraus erkennen kann, weil sonst, wenn man dem Winkel Q 148 Grad geben wollte, die Summe der beyden Winkel Q + P = 148° + 43° = 191°, und folglich grösser als 180°, d. i. als die Summe aller drey Winkel seyn müßte (§. 68. Geom.).

Der dritte Winkel QCP ist also

180° — (43° + 32°) = 180° — 75° = 105°
(§. 70. Geom.)

Hieraus wird die Seite QP gefunden, wenn man schließt:

Sin. P : QC = Sin. QCP : QP (§. 26.27.)
d. i. Sin. 43° : 2202′ = Sin. 105° : QP

log. QP = log. 2202 + log. Sin. 105° — log. Sin 43°
(§. 125. Ar.)

log. 2202 = 3. 3428173
log. Sin. 105° = log. Sin. 75° = 9. 9849438

13. 3277611

log. Sin. 43° = 9. 8337833

log. QP = 3. 4939778

welchem der Logarithmus der Zahl 3118 sehr nahe kömmt. Die Seite QP beträgt also 3118 Schuh, oder 311 Ruthen, 8 Schuh.

§. 40.

Wenn zwey Seiten nebst dem Winkel, welcher der kleinen Seite gegenüber steht, gegeben werden, so läßt sich nicht allemal, wie vorhin, das übrige mit Gewißheit bestimmen. Denn es sey der Winkel, welcher der kleinern Seite CP gegenüber stehet, nämlich

Q = 32°
CP = 1711
CQ = 2202

so würde man also schliessen, um den Winkel P zu finden:

CP

CP : Sin. Q = CQ : Sin. P
d. i. 1711 : Sin. 32° = 2202 : Sin. P

log. Sin. P = log. Sin. 32° + log. 2202 — log. 1711

log. Sin. 32°	=	9. 7242097
log. 2202	=	3. 3428173
		13. 0670270
log. 1711	=	3. 2332500
log. Sin. P	=	9. 8337770

Diesem Logarithmo kömmt in den Sinus-Tabellen der Logarithmus 9. 8337833 ziemlich nahe, welcher zu dem Sinus eines Winkels von 43°, und folglich auch zu dem Sinus eines stumpfen Winkels von 180° — 43°, d. i. 137° gehöret (§. 7.). Der gesuchte Winkel P muß also entweder 43° oder 137° enthalten. Weil er nun der grössern Seite gegenüber stehen soll, so muß er auch grösser seyn, als der gegebene Winkel Q, d. i. grösser als 32°. Es ist aber nicht nur 137°, sondern auch 43° grösser als 32°; folglich wäre hier sowohl ein spitziger als auch ein stumpfer Winkel möglich, welches man auch daraus sehen kann, weil die Summe von 32° + 137° noch nicht 180° ausmacht. Hieraus ist also klar, daß in dem Falle, wo zwey Seiten und ein anliegender Winkel gegeben werden, eine Zweydeutigkeit entstehen kann, wofern der gegebene Winkel der kleinern Seite gegenüber stehet.

§. 41.

Zu der folgenden Aufgabe brauchen wir einen arithmetischen Satz, welcher in der Arithmetik nicht erklärt worden ist, daher er jetzt als ein Lehnsatz vor-

getragen und bewiesen werden soll. Der Satz selbst ist dieser:

Wenn man zu der halben Summe zweyer Grössen ihren halben Unterschied addirt, so erhält man die grössere, und wenn man den halben Unterschied von der halben Summe subtrahirt, so erhält man die kleinere von diesen beyden Grössen.

Denn es heisse die kleinere von zwey Grössen k, der Unterschied u, und die Summe s, so ist die grössere $= k + u$, folglich

$$k + k + u = s$$

d. i. $$2k + u = s$$

$$\frac{2k + u}{2} = \frac{s}{2} \quad (\S.\ 18.\ \text{Ar.})$$

d. i. $$k + \tfrac{1}{2}u = \tfrac{1}{2}s$$

$$k = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}u \quad (\S.\ 14.\ \text{Ar.})$$

$$k + u = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}u + u \quad (\S.\ 13.\ \text{Ar.})$$

d. i. $$k + u = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}u$$

Weiß man also die Summe zweyer Winkel und ihren Unterschied, so kann man durch Hülfe dieses Satzes die Winkel selbst finden. Es sey z. E. die Summe zweyer Winkel $a + b = 120°$ und ihr Unterschied $a - b = 30°$, so ist der grössere Winkel

a =

$$a = \frac{120^\circ}{2} + \frac{30^\circ}{2} = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ,$$

$$\text{der kleinere } b = \frac{120^\circ}{2} - \frac{30^\circ}{2} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ,$$

wovon man sich auch durch die Probe überzeugen kann, denn $75^\circ + 45 = 120^\circ$.

§. 42.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten nebst dem Winkel, welchen diese Seiten einschliessen, die übrigen beyden Winkel und die dritte Seite zu finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 115. Tab. 12.) in dem Triangel ANQ

die Seite AQ $= 86'$
die Seite AN $= 39'$
der Winkel NAQ $= 64^\circ$

so suche man erst die halbe Summe der übrigen beyden Winkel ANQ und AQN. Es ist aber hier

$180^\circ - 64^\circ = \text{ANQ} + \text{AQN}$ (§. 70. Geom.)
d. i. $116^\circ = \text{ANQ} + \text{AQN}$

$$\frac{116^\circ}{2} = 58^\circ = \tfrac{1}{2}(\text{ANQ} + \text{AQN})$$ (§. 14. Ar.)

Hier-

Hierauf schliesse man, um den halben Unterschied dieser beyden Winkel zu finden, folgendergestalt:

$$AQ + AN : AQ - AN = T.\ \tfrac{1}{2}(ANQ + AQN) : T.\ \tfrac{1}{2}(ANQ - AQN)$$ (§. 28.)

also $86' + 39' : 86' - 39' = \text{Tang. } 58° : \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(ANQ - AQN)$

d. i. $125' : 47' = \text{Tang. } 58° : \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(ANQ - AQN)$

$\log. \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(ANQ - AQN) = \log. \text{Tang. } 58° + \log. 47 - \log. 125$

$\log. \text{Tang. } 58°, 0' = 10.\ 2042108$

$\log. 47 = 1.\ 6720979$

$11.\ 8763087$

$\log. 125 = 2.\ 0969100$

$\log. \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(ANQ - AQN) = 9.\ 7793987$

Diesen Logarithmum suche man unter den Logarithmen der Tangenten, so muß der Winkel, welcher dazu gehöret, der halbe Unterschied der beyden Winkel, ANQ und AQN seyn. Es kömmt ihm aber der Logar. Tang. 31°, 2′ sehr nahe; folglich ist, weil der halbe Unterschied zweyer Winkel eines geradelinichten Triangels kein stumpfer Winkel seyn kann,

$\frac{1}{2}(ANQ - AQN) = 31°, 2'$

$\left\langle \begin{array}{l} ANQ = 58°, + 31°, 2' = 89°, 2' \\ AQN = 58°, - 31°, 2' = 26°, 58' \end{array} \right.$ (§. 41).

Nunmehr läßt sich die Seite NQ durch die gewöhnliche Proportion berechnen.

Sin.

Sin. ANQ : AQ = Sin. NAQ : NQ (§. 27.)
d. i. Sin. 89°, 2′ : 86′ = Sin. 64° : NQ

log. NQ = log. Sin. 64° + log. 86 — log. Sin. 89°, 2′

log. Sin. 64°, 0′ = 9. 9536602
log. 86 = 1. 9344984

11. 8881586

log. Sin. 89°, 2′ = 9. 9999382

log. NQ = 1. 8882204

welchem der Logarithmus von 77 nahe kömmt, daher die Seite NQ 77 Schuh beträgt.

§. 43.

Dieser Aufgabe müßte man sich also bedienen, wenn man die Entfernung zweyer Oerter, zu denen beyden man kommen kann, z. E. BG (Fig. 80. Tab. 7.) trigonometrisch finden wollte.

§. 44.

Aufgabe. Aus den gegebenen drey Seiten eines Triangels die Winkel zu finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 116.) in dem Triangel QCP,

die Seite QP = 24′
die Seite CQ = 17′
die Seite CP = 11′

Man

Man stelle sich eine senkrechte Linie CB aus der Spitze desjenigen Winkels vor, welcher der größten Seite QP gegenüber steht; so wird der Triangel QCP in die beyden rechtwinklichten Triangel QCB und CBP zergliedert. Nun beschreibe man mit der kleinsten Seite CP einen Cirkel, und suche zuerst den Theil von QP, welcher sich ausserhalb der Peripherie befindet, nämlich QS, durch folgende Proportion:

$$QP : CQ + CP = CQ - CP : QS \text{ (§. 29.)}$$

d. i. $24' : 17' + 11' = 17' - 11' : QS$

oder $24' : 28' = 6' : QS$

$$QS = \frac{28' \times 6'}{24'} = 7'$$

Diese Linie QS dient dazu, die Chorde SP und ihre Hälfte BP zu finden. Denn

$$SP = QP - QS$$

d. i. $SP = 24' - 7' = 17'$

$$BP = \tfrac{1}{2} SP = 8'\ 5'' \text{ (§. 111. Geom.)}$$

In dem rechtwinklichten Triangel CBP ist also die Hypotenuse CP und der Cathetus BP bekannt; folglich läßt sich der Winkel P finden, wenn man schließt:

CP : BP = Sin. Tot. : Cos. P (§. 22.)
11′ : 8′ 5″ = Sin. Tot. : Cos. P
oder 110″ : 85″ = Sin. Tot. : Cos. P

log. Cos. P = log. 85 + log. Sin. Tot. — log. 110

log. 85 = 1. 9294189
log. Sin. Tot. = 10. 0000000

11. 9294189

log. 110 = 2. 0413927

log. Cos. P = 9. 8880262

welches der Logarithmus Sinus von 50°, 36′ ist, dessen Complements-Winkel also, nämlich 39°, 24′ der Winkel P seyn muß.

Auf eben die Art läßt sich auch der Winkel Q berechnen, wenn man in dem andern rechtwinklichten Triangel QCB, wo die Hypotenuse QC gegeben ist, noch die Seite QB bestimmt. Es ist aber

$$QB = QS + SB = QS + \tfrac{1}{2} SP$$ (§. 111. Geom.)

d. i. QB = 7′ + 8′ 5″ = 15′, 5″

Da sich nun verhält

QC : QB = Sin. Tot. : Cos. Q (§. 22.)
d. i. 17′ : 15′, 5″ = Sin. Tot. : Cos. Q
oder 170″ : 155″ = Sin. Tot. : Cos. Q

log. Cos. Q = log. 155 + log. Sin. Tot, — log. 170

log.

log. 155 = 2. 1903317
log. Sin. Tot. = 10. 0000000

12. 1903317

log. 170 = 2. 2304489

log. Cos. Q = 9. 9598828

zu welchem der Logarithmus Sinus von 65°, 45′ gehöret. Da nun dieses der Complements-Winkel von Q ist, so muß Q selbst ein Winkel von 24°, 15′ seyn.

Hieraus ist der dritte Winkel QCP leicht zu bestimmen. Denn es war

P = 39°, 24′
Q = 24°, 15′

P + Q = 63°, 39′ (§. 13. Ar.)

180° — (P + Q) = QCP (§. 70. Geom.)

180° — 63, 39′ = 116°, 21′ = QCP

§. 45.

Wenn nicht von einem ungleichseitigen Triangel, wie in der vorigen Aufgabe, die Rede ist, so lassen sich die Winkel geschwinder finden. Von einem gleichseitigen Triangel weiß man die Winkel ohne Rechnung, indem jeder 60° beträgt (§. 75. Geom.), und in einem gleichschenklichten könnte man die Winkel aus den gegebenen Seiten auf folgende Art berechnen. Es sey z. E. (Fig. 41. Tab. 3.) in dem gleichschenklichten Triangel CAD

AC

AC = 36′
AD = 36′
CD = 28′

so ist, wenn man AB senkrecht auf CD ziehet, CB = BD = $\frac{1}{2}$ CD. Denn

AC = AD vermöge der angenommenen Bedingung.
AB = AB
e = o vermöge der Constr.

CB = BD (§. 106. Geom.)

CD = CB + BD = 2 CB

$\frac{1}{2}$ CD = CB

d. i. $\frac{28'}{2}$ = 14′ = CB

Nun verhält sich

AC : CB = Sin. Tot. : Cos. C (§. 22.)
36′ : 14′ = Sin. Tot. : Cos. C

---

log. Cos. C = log. 14 + log. Sin. Tot. — log. 36

log. 14 = 1. 1461280
log. Sin. Tot. = 10. 0000000

---

11. 1461280

log. 36 = 1. 5563025

---

log. Cos. C = 9. 5898255

zu welchem ein Winkel von 22°, 53′ gehöret, dessen Complements-Winkel also, nämlich 67°, 7′ der Winkel C seyn muß. Weil also

C = 67°, 7′
D = C (§. 74. Geom.)

D = 67°, 7′
und < CAD = 180° — (67°, 7′ + 67°, 7′)
d. i. < CAD = 180° — 134°, 14′ = 45°, 46′

§. 46.

Sollte man also auf dem Felde oder sonst einen Winkel messen, ohne daß man einen Winkelmesser oder ein ander Instrument bey der Hand hätte; so liesse sich dieses sehr gut bewerkstelligen, wenn man sich auf den Schenkeln des gegebenen Winkels zwey gleiche Stücke erwählte, alsdenn ihre Grösse und die Entfernung ihrer Endpuncte von einander durch Hülfe einer Kette oder Stange bestimmte. Denn auf die Art würde man die Seiten eines gleichschenklichten Triangels erhalten, aus denen man den verlangten Winkel nach §. 45. trigonometrisch berechnen könnte. Sonst kann man sich auch zu dieser Absicht eine Tabelle verfertigen, wie die folgende ist, worinnen man die Sehnen der Winkel nach einem Halbmesser von 30 Schuh findet, welche sich aber nur in den Fällen gebrauchen läßt, wo man nicht nöthig hat, die Winkel bis auf einzelne Minuten zu bestimmen. Nämlich weil die Sinus nichts anders sind, als die Hälf-

ten

ten der Chorden, die zu einem doppelten Bogen gehören (§. 6.), so darf man nur die Sinus der Winkel aus den gewöhnlichen Tabellen nehmen, und mit 2 multipliciren, um die Sehnen noch einmal so grosser Bogen zu erhalten. Z. E. der Sinus von 9°, 30′ ist = 1650476 folglich ist 1650470 × 2 d. i. 3300952 die Chorde von einem Bogen, der zweymal so viel beträgt, als 9°, 30′, d. h. von einem Bogen von 19°; wobey aber, wie man wohl merken muß, der Halbmesser 10000000 angenommen wird. Weil nun diese Eintheilung des Halbmessers und der Chorden durch die gewöhnlichen Meßkerten und Schnuren nicht genau ausgedrückt werden kann; so pflegt man die Chorden nach einem kleinern Halbmesser zu berechnen, welches durch Hülfe der Regel Detri leicht geschehen kann, wenn man sie nur erst aus den Sinus-Tabellen nach dem grössern Halbmesser bestimmt hat. So würde man z. E. nachdem man auf die vorige Art die Chorde von 19° nach dem Halbmesser 10000000 gefunden hätte, eben dieselbe nach einem Halbmesser von 30′ = 300″, welcher in der angehängten Tabelle zum Grunde gelegt wird, durch folgende Proportion finden können:

Wie sich verhält der Halbmesser 10000000 zu dem Halbmesser 300, so verhält sich die Sehne von 19° nach dem ersten Halbmesser, d. i. 3300952 zu der Sehne von 19° nach dem Halbmesser von 300

$$10000000 : 300 = 3300952$$

$$\frac{3}{}$$

$$100000) 9902756 (99\tfrac{2756}{100000}$$

Die Chorde eines Bogens von 19° enthält also $99\frac{2756}{1000000}$ Zolle, wenn der Halbmesser 300 Zolle oder 30 Schuh beträgt. Den Bruch $\frac{2756}{1000000}$, welcher ein sehr kleiner Theil eines Zolls ist, und daher mit der Kette oder Schnur nicht ausgedrückt werden kann, läßt man weg, und nimmt also nur 99 Zoll, d. i. 9 Schuh, 9 Zoll für die Chorde eines Winkels von 19 Grad an, wie man aus der angehängten Tabelle sehen kann.

Will man nun also durch Hülfe dieser Tabelle die Grösse eines Winkels auf dem Felde erforschen, so bemerke man durch ein Paar Stäbe auf den beyden Schenkeln des zu messenden Winkels diejenigen Puncte, die 30 Schuh von seiner Spitze abstehen, messe alsdenn die Entfernung dieser beyden Stäbe, und suche diese gemessene Linie unter den Chorden, so wird man dabey die Grösse des Winkels angezeigt finden. Z. E. hätte man die Chorde 20 Schuh 9 Zoll gefunden, so würde der Winkel 40°, 46′ enthalten. Man kann auch die Winkel auf dem Papiere auf diese Art messen, wenn man mit dem Cirkel durch Hülfe des verjüngten Maasstabes den Halbmesser auf die Schenkel eines Winkels trägt, und alsdenn auf vorige Art verfähret. Ist ein verjüngter Maasstab zu dieser Absicht besonders verfertiget, die Grösse der Bogen durch ihre Chorden zu finden, so wird er ein geradelinichter Transporteur genannt; welcher auch, so wie die gegenwärtige Tabelle, dazu dienet, einen gegebenen Winkel, wenn nicht die größte Genauigkeit verlangt wird, auf das Papier oder auf das Feld zu tragen. Sollte man

z. E.

z. E. einen Winkel von 49°, 15′ beschreiben; so nehme man die Chorde von 49°, 15′, welche nach einem Halbmesser von 30 Schuh, 25 Schuh beträgt; mache einen gleichschenklichten Triangel aus zwey Seiten von 30′ und einer Seite von 25′, so muß der Winkel, welcher der Seite von 25 Schuh gegenüber steht, 49°, 15′ enthalten. Auf dem Papier braucht man nur mit dem Halbmesser aus demjenigen Puncte, welcher die Spitze des Winkels seyn soll, einen Bogen zu beschreiben, und die Chorde in diesen Bogen zu tragen, so wird dadurch der verlangte Winkel bestimmt.

Tafel

zur Messung der Bogen oder Winkel durch Hülfe der Chorden,

wobey der Halbmesser von 30 Schuh, und die Eintheilung des Schuhs in 10 Zoll angenommen wird.

i

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
0.	1.	0.	11.	2.	0.	3.	49.
	2.		23.		1.	4.	1.
	3.		34.		2.		12.
	4.		46.		3.		23.
	5.		57.		4.		35.
	6.	1.	9.		5.		47.
	7.		20.		6.		58.
	8.		31.		7.	5.	9.
	9.		43.		8.		21.
1.	0.		55.		9.		32.
	1.	2.	6.	3.	0.		43.
	2.		17.		1.		55.
	3.		29.		2.	6.	7.
	4.		40.		3.		19.
	5.		52.		4.		30.
	6.	3.	3.		5.		41.
	7.		15.		6.		53.
	8.		26.		7.	7.	5.
	9.		38.		8.		16.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
3.	9.	7.	27.	6.	9.	13.	12
4.	0.		39.	7.	0.		24.
	1.		50.		1.		36.
	2.	8.	2.		2.		47.
	3.		13.		3.		58.
	4.		25.		4.	14.	10.
	5.		36.		5.		22.
	6.		47.		6.		33.
	7.		59.		7.		45.
	8.	9.	10.		8.		56.
	9.		22.		9.	15.	8.
5.	0.		34.	8.	0.		20.
	1.		45.		1.		31.
	2.		56.		2.		42.
	3.	10.	8.		3.		54.
	4.		20.		4.	16.	6.
	5.		31.		5.		17.
	6.		42.		6.		29.
	7.		54.		7.		40.
	8.	11.	6.		8.		52.
	9.		17.		9.	17.	4.
6.	0.		29.	9.	0.		15.
	1.		40.		1.		26.
	2.		52.		2.		38.
	3.	12.	3.		3.		50.
	4.		14.		4.	18.	2.
	5.		26.		5.		14.
	6.		38.		6.		25.
	7.		49.		7.		36.
	8.	13.	1.		8.		48.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
9.	9.	19.	0.	12.	9.	24.	50.
10.	0.		11.	13.	0.	25.	2.
	1.		23.		1.		14.
	2.		34.		2.		25.
	3.		46.		3.		37.
	4.		57.		4.		48.
	5.	20.	9.		5.	26.	0.
	6.		21.		6.		12.
	7.		32.		7.		24.
	8.		44.		8.		36.
	9.		56.		9.		47.
11.	0.	21.	8.	14.	0.		59.
	1.		19.		1.	27.	11.
	2.		31.		2.		23.
	3.		42.		3.		34.
	4.		54.		4.		46.
	5.	22.	6.		5.		58.
	6.		18.		6.	28.	10.
	7.		29.		7.		22.
	8.		41.		8.		34.
	9.		52.		9.		46.
12.	0.	23.	4.	15.	0.		57.
	1.		16.		1.	29.	9.
	2.		28.		2.		21.
	3.		40.		3.		33.
	4.		51.		4.		44.
	5.	24.	3.		5.		56.
	6.		14.		6.	30.	8.
	7.		26.		7.		20.
	8.		38.		8.		32.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
15.	9.	30.	44.	18.	9.	36.	43.
16.	0.		56.	19.	0.		55.
	1.	31.	8.		1.	37.	7.
	2.		20.		2.		20.
	3.		32.		3.		32.
	4.		44.		4.		44.
	5.		56.		5.		56.
	6.	32.	7.		6.	38.	8.
	7.		19.		7.		20.
	8.		31.		8.		32.
	9.		43.		9.		44.
17.	0.		55.	20.	0.		56.
	1.	33.	7.		1.	39.	9.
	2.		19.		2.		21.
	3.		31.		3.		33.
	4.		43.		4.		45.
	5.		55.		5.		58.
	6.	34.	7.		6.	40.	10.
	7.		19.		7.		22.
	8.		31.		8.		34.
	9.		43.		9.		46.
18.	0.		55.	21.	0.		58.
	1.	35.	7.		1.	41.	10.
	2.		19.		2.		22.
	3.		31.		3.		35.
	4.		43.		4.		47.
	5.		55.		5.	42.	0.
	6.	36.	7.		6.		12.
	7.		19.		7.		24.
	8.		31.		8.		36.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
21.	9.	42.	49.	24.	9.	49.	2.
22.	0.	43.	1.	25.	0.		15.
	1.		14.		1.		28.
	2.		26.		2.		40.
	3.		38.		3.		53.
	4.		50.		4.	50.	5.
	5.	44.	3.		5.		18.
	6.		15.		6.		31.
	7.		27.		7.		43.
	8.		40.		8.		56.
	9.		52.		9.	51.	9.
23.	0.	45.	5.	26.	0.		22.
	1.		17.		1.		34.
	2.		30.		2.		47.
	3.		42.		3.	52.	0.
	4.		55.		4.		12.
	5.	46.	7.		5.		25.
	6.		19.		6.		38.
	7.		32.		7.		51.
	8.		45.		8.	53.	4.
	9.		57.		9.		16.
24.	0.	47.	9.	27.	0.		29.
	1.		22.		1.		42.
	2.		34.		2.		55.
	3.		47.		3.	54.	8.
	4.		59.		4.		20.
	5.	48.	12.		5.		33.
	6.		24.		6.		46.
	7.		37.		7.		59.
	8.		50.		8.	55.	12.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
27.	9.	55.	25.	30.	8.	61.	46.
28.	0.		38.		9.	62.	0.
	1.		51.	31.	0.		13.
	2.	56.	4.		1.		27.
	3.		17.		2.		40.
	4.		30.		3.		53.
	5.		43.		4.	63.	6.
	6.		56.		5.		20.
	7.	57.	9.		6.		34.
	8.		22.		7.		47.
	9.		35.		8.	64.	0.
29.	0.		48.		9.		14.
	1.	58.	2.	32.	0.		27.
	2.		15.		1.		41.
	3.		28.		2.		55.
	4.		41.		3.	65.	8.
	5.		54.		4.		22.
	6.	59.	7.		5.		36.
	7.		20.		6.		49.
	8.		33.		7.	66.	3.
	9.		47.		8.		17.
30.	0.	60.	0.		9.		30.
	1.		13.	33.	0.		44.
	2.		26.		1.		58.
	3.		40.		2.	67.	11.
	4.		53.		3.		25.
	5.	61.	6.		4.		39.
	6.		19.		5.		53.
	7.		33.		6.	68.	6.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
33.	7.	68.	20.	36.	6.	75.	11.
	8.		34.		7.		26.
	9.		48.		8.		40.
34.	0.	69.	2.		9.		54.
	1.		16.	37.	0.	76.	9.
	2.		30.		1.		24.
	3.		44.		2.		38.
	4.		58.		3.		52.
	5.	70.	12.		4.	77.	7.
	6.		26.		5.		22.
	7.		40.		6.		37.
	8.		54.		7.		51.
	9.	71.	8.		8.	78.	6.
35.	0.		22.		9.		21.
	1.		36.	38.	0.		36.
	2.		50.		1.		50.
	3.	72.	5.		2.	79.	5.
	4.		19.		3.		20.
	5.		33.		4.		35.
	6.		47.		5.		50.
	7.	73.	2.		6.	80.	5.
	8.		16.		7.		20.
	9.		30.		8.		35.
36.	0.		44.		9.		50.
	1.		58.	39.	0.	81.	5.
	2.	74.	13.		1.		20.
	3.		27.		2.		35.
	4.		42.		3.		50.
	5.		56.		4.	82.	5.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min
39.	5.	82.	20.
	6.		36.
	7.		51.
	8.	83.	6.
	9.		22.
40.	0.		37.
	1.		52.
	2.	84.	8.
	3.		24.
	4.		39.
	5.		55.
	6.	85.	10.
	7.		26.
	8.		41.
	9.		57.
41.	0.	86.	13.
	1.		29.
	2.		44.
	3.	87.	0.
	4.		16.
	5.		31.
	6.		47.
	7.	88.	3.
	8.		19.
	9.		35.
42.	0.		51.
	1.	89.	8.
	2.		24.
	3.		40.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
42.	4.	89.	56.
	5.	90.	12.
	6.		28.
	7.		44.
	8.	91.	1.
	9.		17.
43.	0.		34.
	1.		50.
	2.	92.	6.
	3.		23.
	4.		40.
	5.		56.
	6.	93.	13.
	7.		30.
	8.		46.
	9.	94.	3.
44.	0.		20.
	1.		37.
	2.		54.
	3.	95.	11.
	4.		28.
	5.		45.
	6.	96.	2.
	7.		19.
	8.		36.
	9.		53.
45.	0.	97.	11.
	1.		28.
	2.		46.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
45.	3.	98.	3.	48.	2.	106.	54.
	4.		20.		3.	107.	13.
	5.		38.		4.		32.
	6.		56.		5.		52.
	7.	99.	14.		6.	108.	12.
	8.		31.		7.		31.
	9.		49.		8.		51.
46.	0.	100.	6.		9.	109.	10.
	1.		24.	49.	0.		30.
	2.		42.		1.		50.
	3.	101.	0.		2.	110.	10.
	4.		18.		3.		30.
	5.		37.		4.		50.
	6.		55.		5.	111.	10.
	7.	102.	13.		6.		31.
	8.		31.		7.		51.
	9.		50.		8.	112.	12.
47.	0.	103.	8.		9.		32.
	1.		26.	50.	0.		53.
	2.		45.		1.	113.	14.
	3.	104.	4.		2.		35.
	4.		22.		3.		56.
	5.		41.		4.	114.	17.
	6.	105.	0.		5.		38.
	7.		19.		6.		59.
	8.		38.		7.	115.	20.
	9.		57.		8.		42.
48.	0.	106.	16.		9.	116.	4.
	1.		35.	51.	0.		25.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
51.	1.	116.	47.	54.	0.	128.	19.
	2.	117.	9.		1.		46.
	3.		31.		2.	129.	12.
	4.		53.		3.		39.
	5.	118	16.		4.	130.	6.
	6.		38.		5.		33.
	7.	119.	1.		6.	131.	0.
	8.		23.		7.		28.
	9.		46.		8.		56.
52.	0.	120.	9.		9.	132.	24.
	1.		32.	55.	0.		53.
	2.		55.		1.	133.	22.
	3.	121.	18.		2.		51.
	4.		42.		3.	134.	20.
	5.	122.	6.		4.		50.
	6.		29.		5.	135.	20.
	7.		53.		6.		50.
	8.	123.	17.		7.	136.	21.
	9.		41.		8.		52.
53.	0.	124.	6.		9.	137.	24.
	1.		30.	56.	0.		56.
	2.		55.		1.	138.	28.
	3.	125.	20.		2.	139.	0.
	4.		45.		3.		33.
	5.	126.	10.		4.	140.	6.
	6.		36.		5.		40.
	7.	127.	1.		6.	141.	14.
	8.		27.		7.		49.
	9.		53.		8.	142.	24.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
56.	9.	143.	0.	58.	5.	154.	20.
57.	0.		36.		6.	155.	12.
	1.	144.	13.		7.	156.	6.
	2.		51.		8.	157.	2.
	3.	145.	30.		9.	158.	1.
	4.	146.	9.	59.	0.	159.	3.
	5.		48.		1.	160.	8.
	6.	147.	29.		2.	161.	16.
	7.	148.	10.		3.	162.	29.
	8.		53.		4.	163.	47.
	9.	149.	36.		5.	165.	12.
58.	0.	150.	20.		6.	166.	46.
	1.	151.	5.		7.	168.	32.
	2.		52.		8.	170.	38.
	3.	157.	39.		9.	173.	23.
	4.	153.	28.	60.	0.	180.	0.

Tab. I.

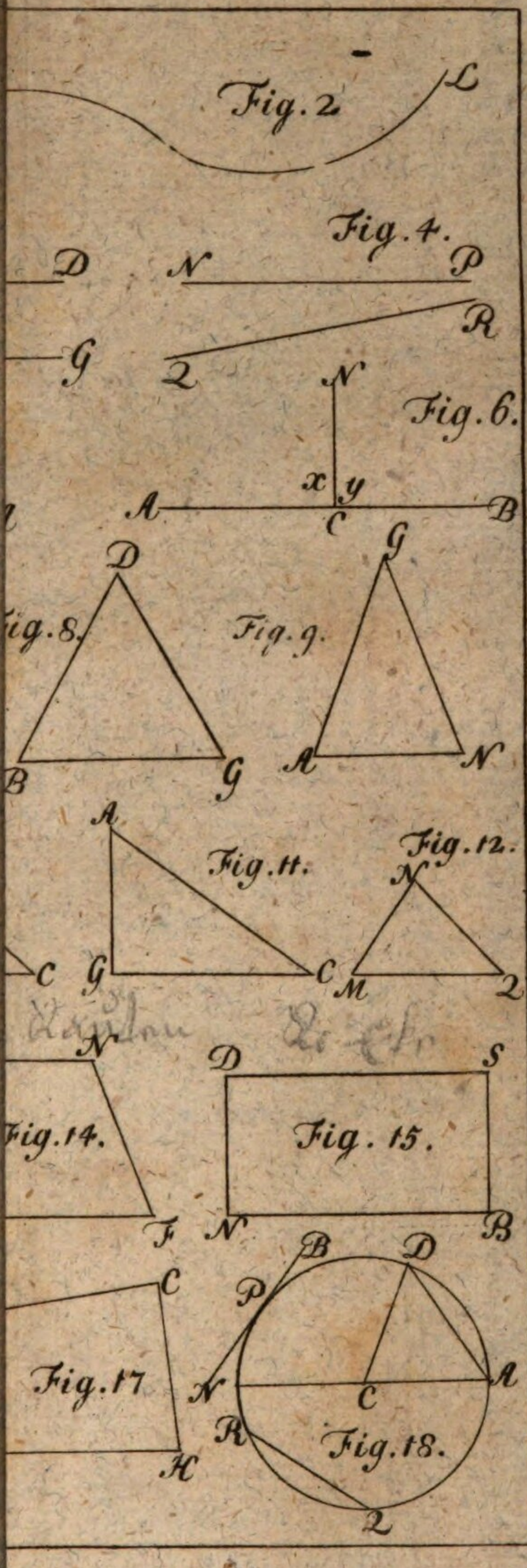


Fig. 2
L
Fig. 4.
D
N
P
R
G
Z
N
Fig. 6.
x
y
A
C
B
D
G
Fig. 8.
Fig. 9.
B
G
A
N
A
Fig. 11.
Fig. 12.
N
C
G
C
M
Z
N
D
S
Fig. 14.
Fig. 15.
F
N
B
B
D
C
P
Fig. 17
N
C
A
R
Fig. 18.
K
Z

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
56.	9.	143.	0.	58.	5.	154.	20.
57.	0.		36.		6.	155.	12.
	1.	144.	13.		7.	156.	6.
	2.		51.		8.	157.	2.
	3.	145.	30.		9.	158.	1.
	4.	146.	9.	59.	0.	159.	3.
	5.		48.		1.	160.	8.
	6.	147.	29.		2.	161.	16.
	7.	148.	10.		3.	162.	29.
	8.		53.		4.	163.	47.
	9.	149.	36.		5.	165.	12.
58.	0.	150.	20.		6.	166.	46.
	1.	151.	5.		7.	168.	32.
	2.		52.		8.	170.	38.
	3.	157.	39.		9.	173.	23.
	4.	153.	28.	60.	0.	180.	0.

Tab. I.

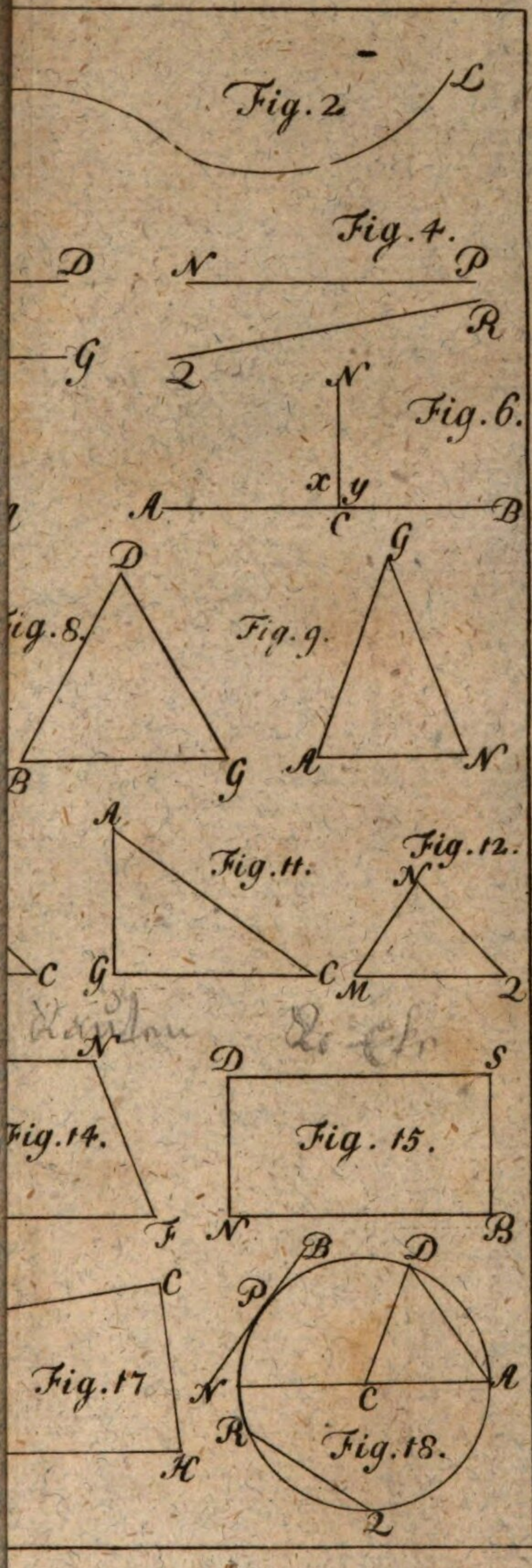


Fig. 2
L
Fig. 4.
D
N
P
R
G
Z
N
Fig. 6.
x
y
A
C
B
D
G
Fig. 8.
Fig. 9.
B
G
A
N
A
Fig. 11.
Fig. 12.
N
C
G
C
M
Z
N
D
S
Fig. 14.
Fig. 15.
F
N
B
C
B
D
P
Fig. 17
N
C
A
R
Fig. 18.
K
Z

Fig. 21.

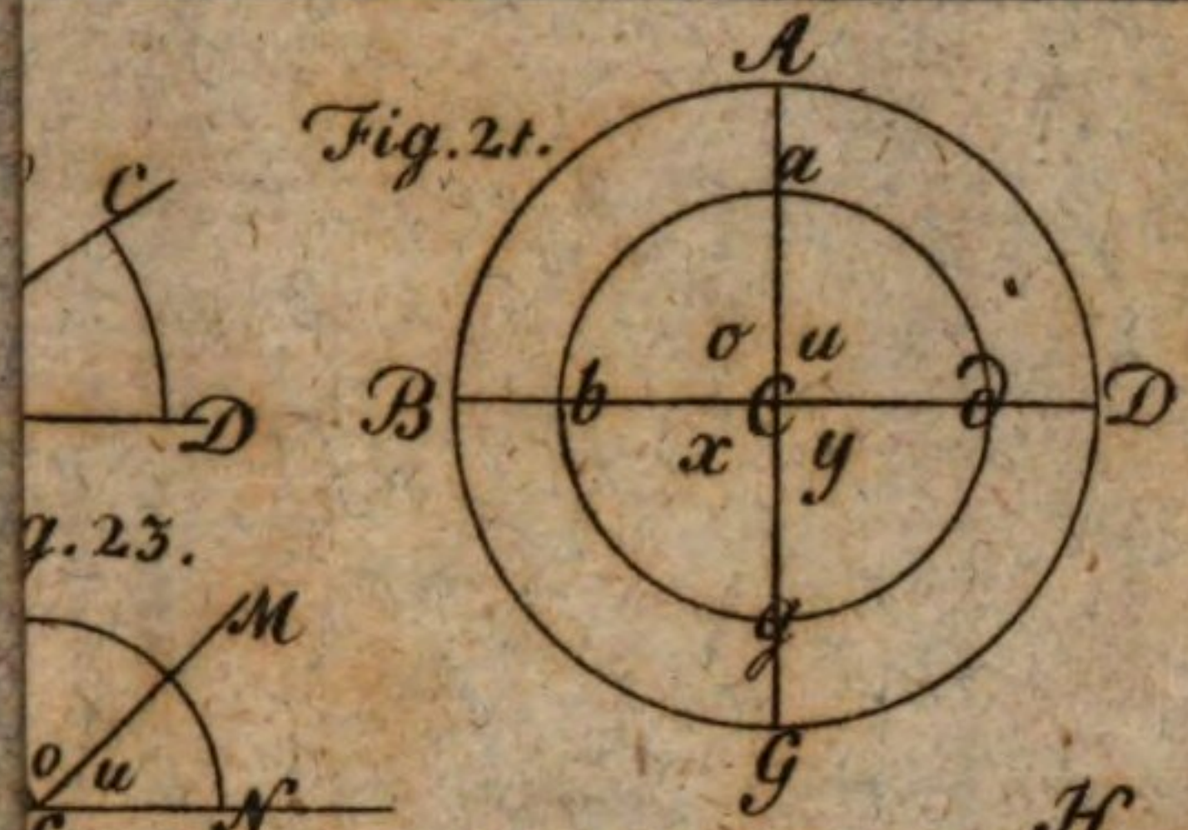


Fig. 23.

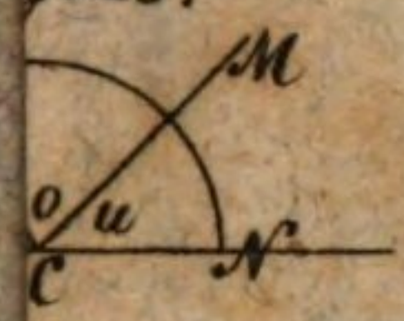
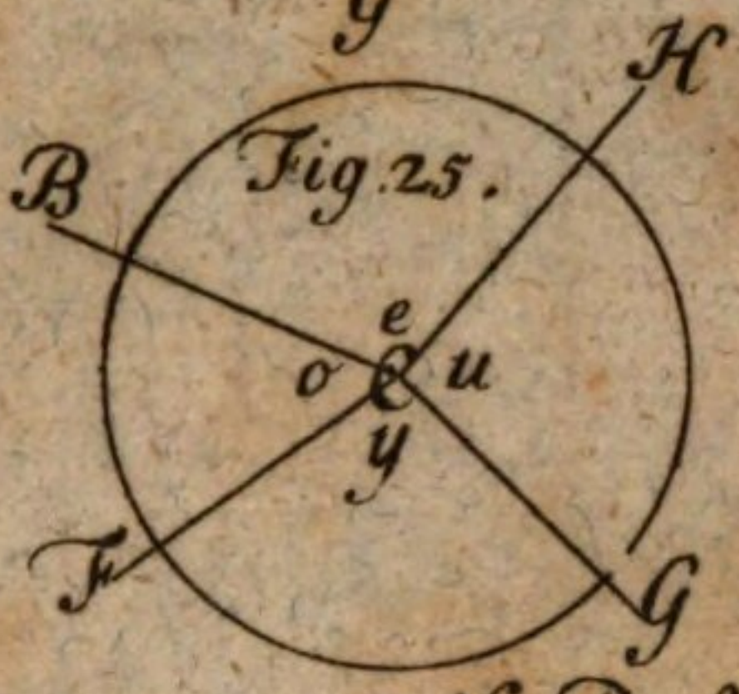


Fig. 25.



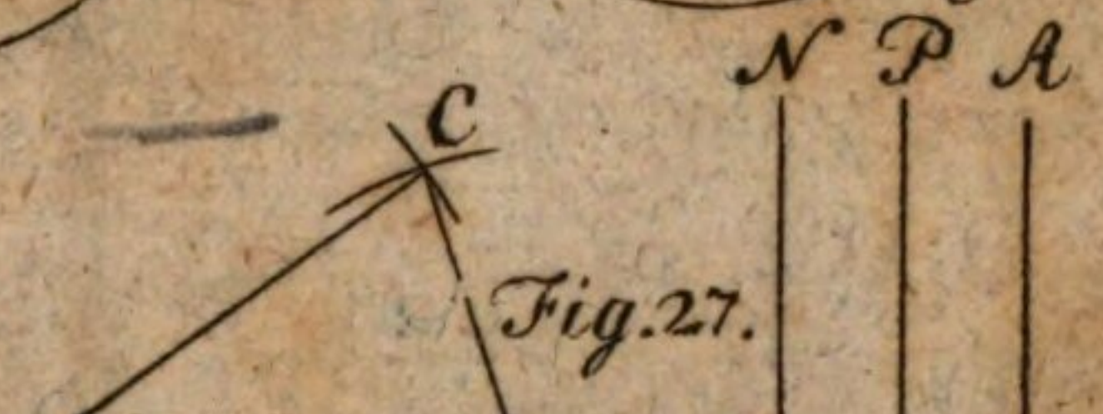


Fig. 27.

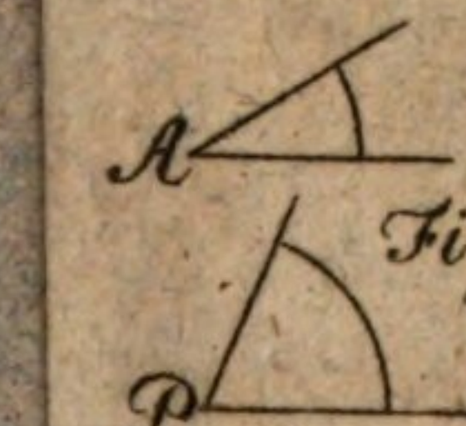


Fig. 29.

Fig. 30.

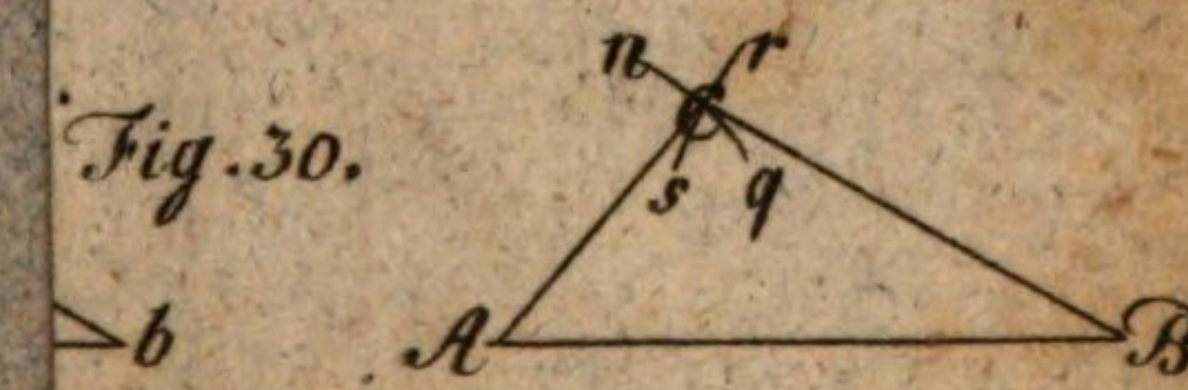


Fig. 32.

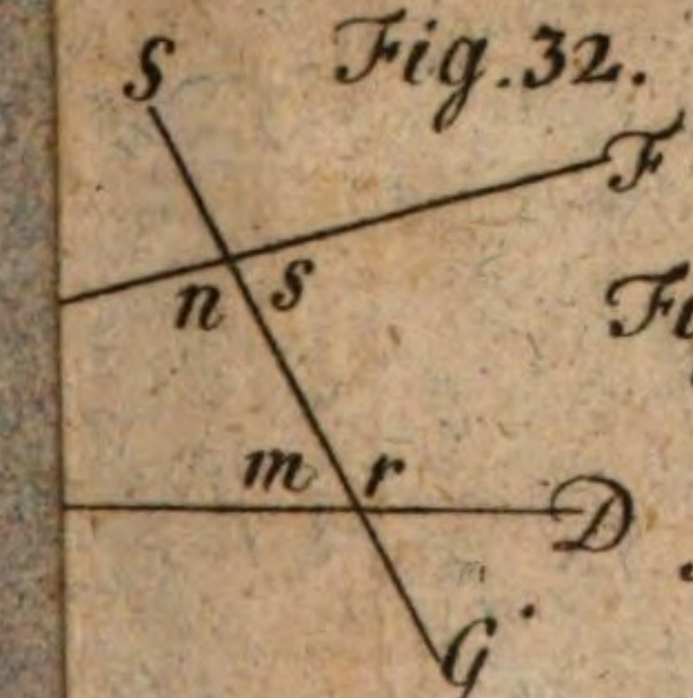
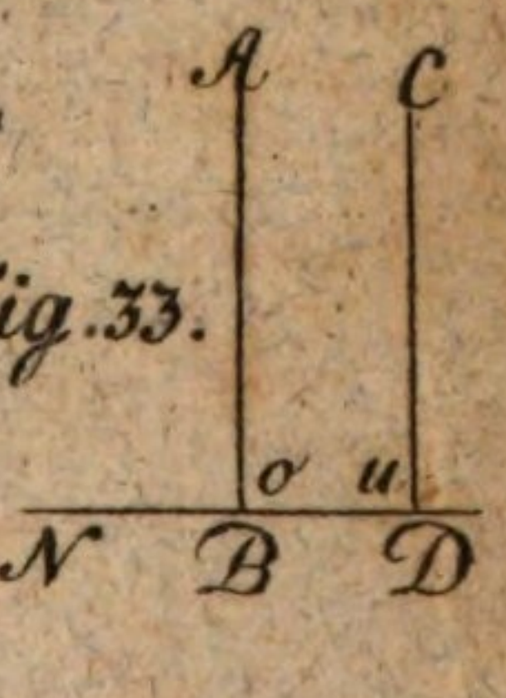
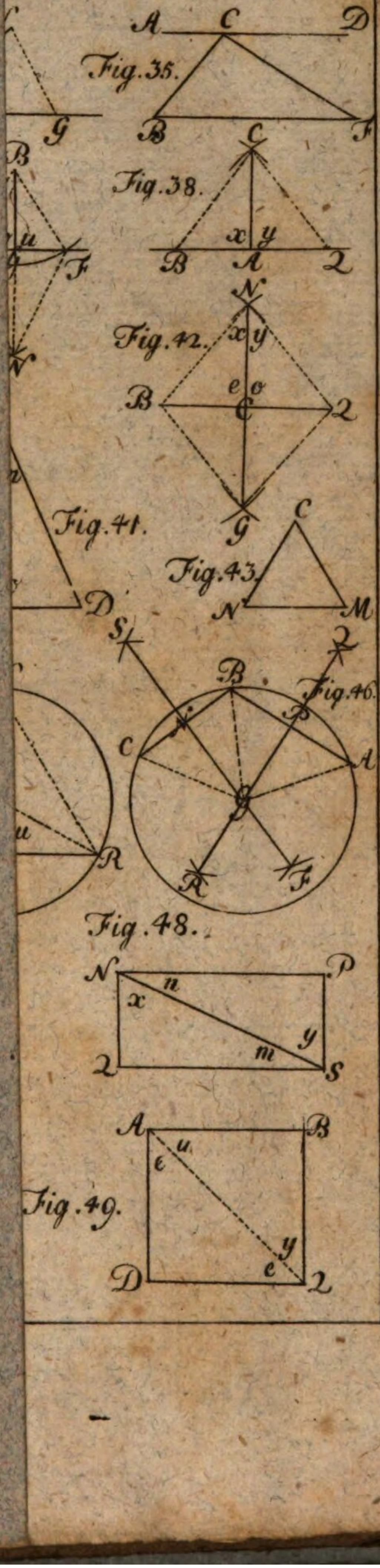


Fig. 33.



Tab. III.


A
C
D
Fig. 35.
G
B
F
B
C
Fig. 38.
x
y
B
A
2
u
F
N
Fig. 42.
x
y
e
o
B
C
2
Fig. 41.
G
C
Fig. 43.
D
N
M
S
2
B
Fig. 46.
C
A
R
R
F
Fig. 48.
N
P
n
x
y
m
2
S
A
B
u
e
y
e
D
2
Fig. 49.

Tab. IV.

Fig. 51.

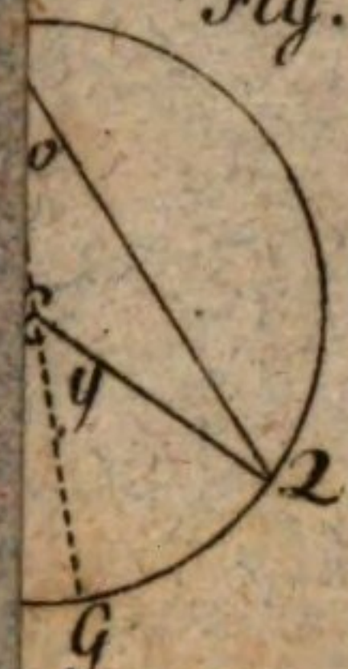
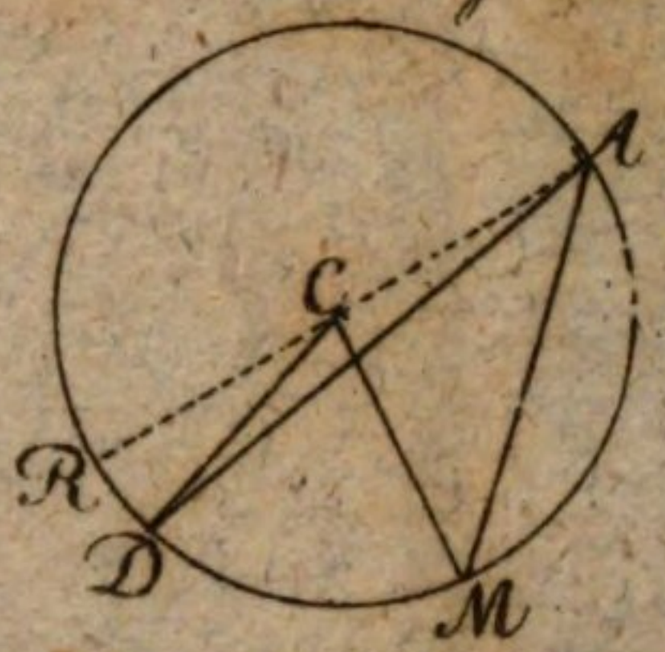


Fig. 52.



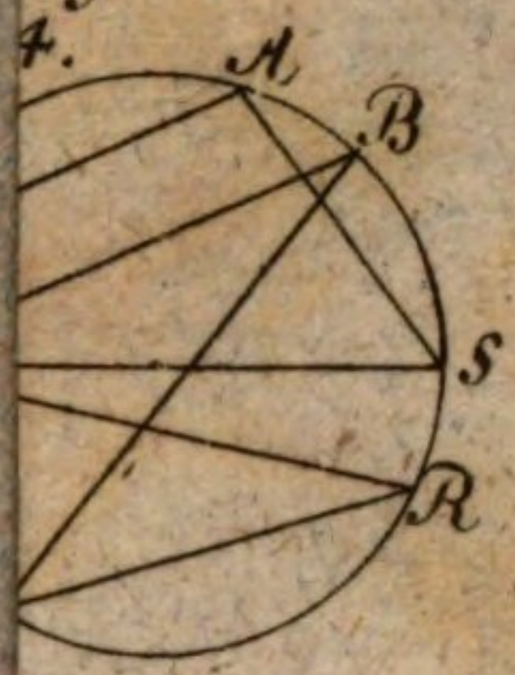
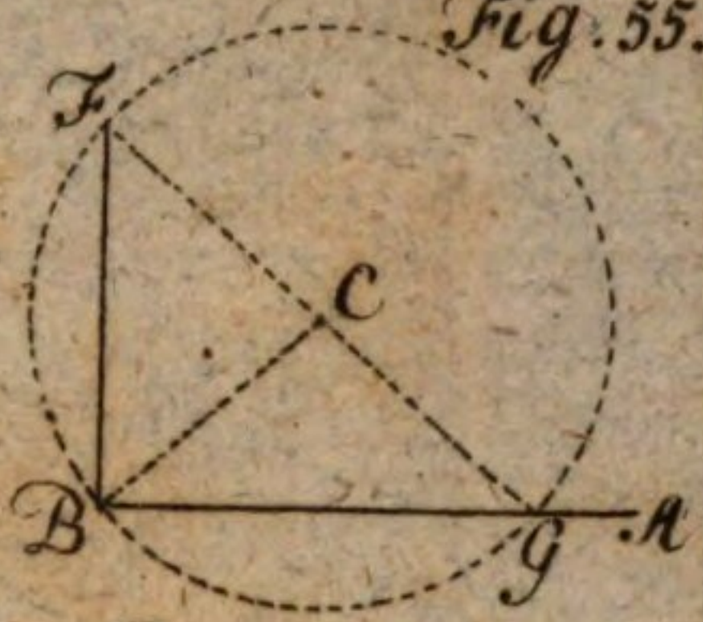


Fig. 55.



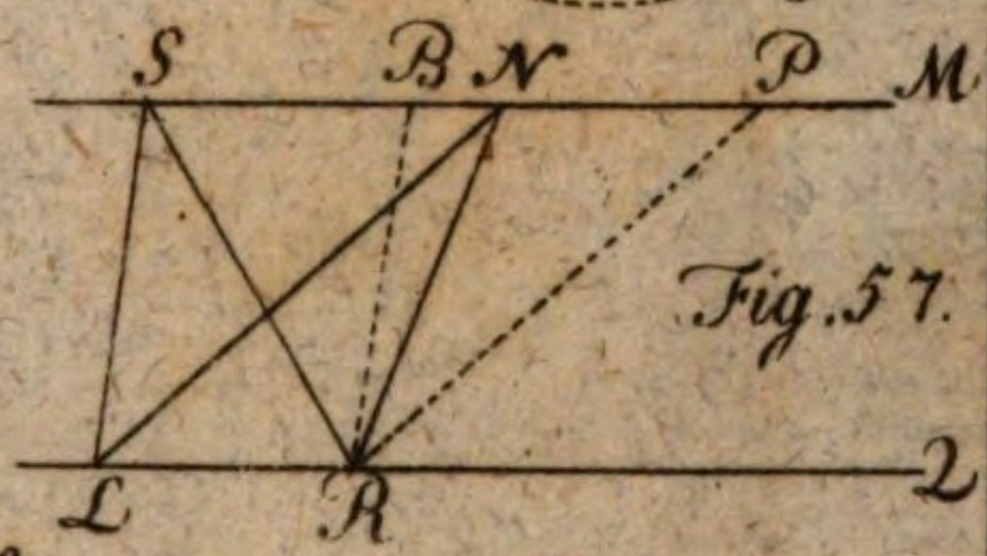


Fig. 57.

Fig. 59.

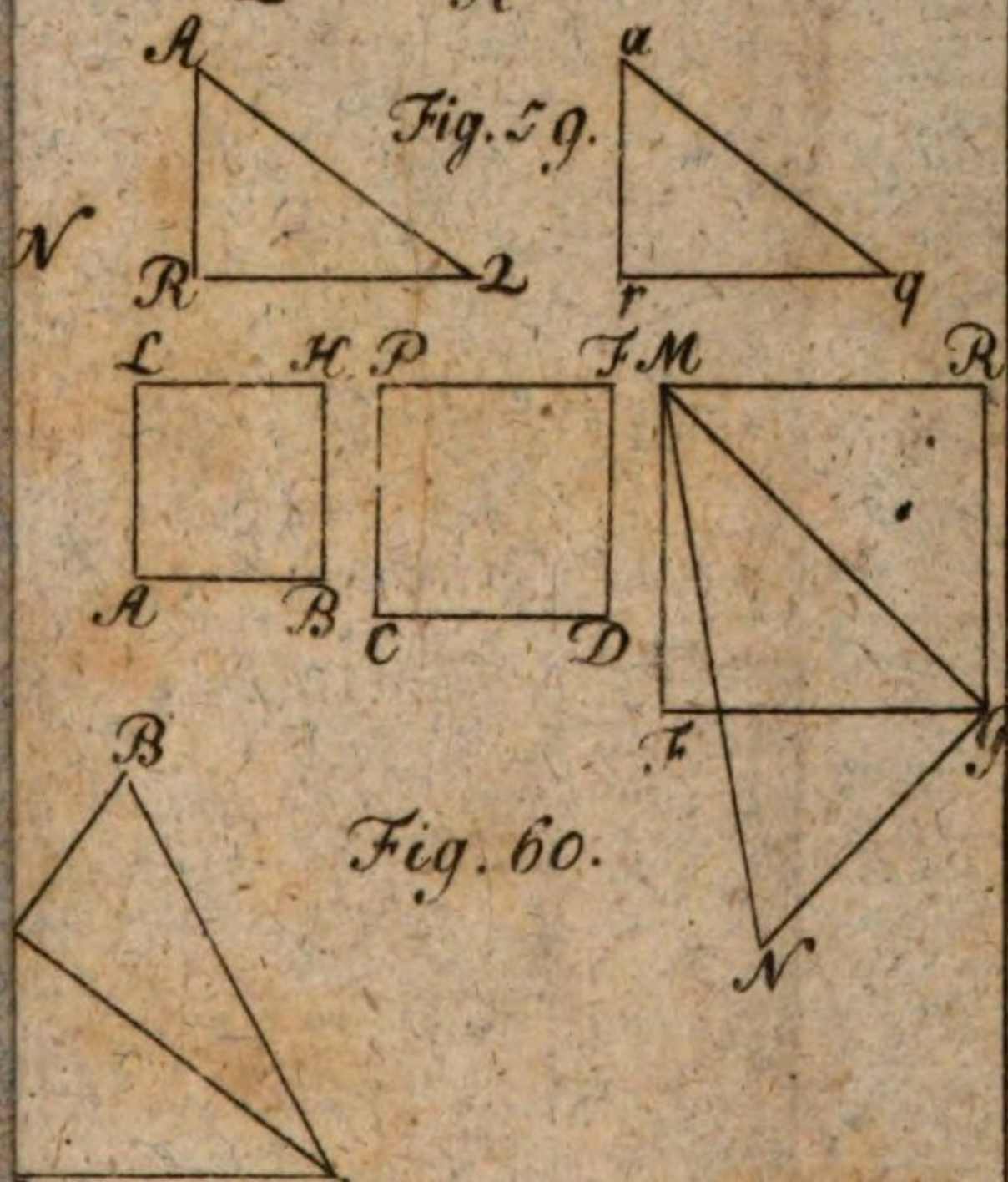


Fig. 60.

Tab. V.

Fig. 62.

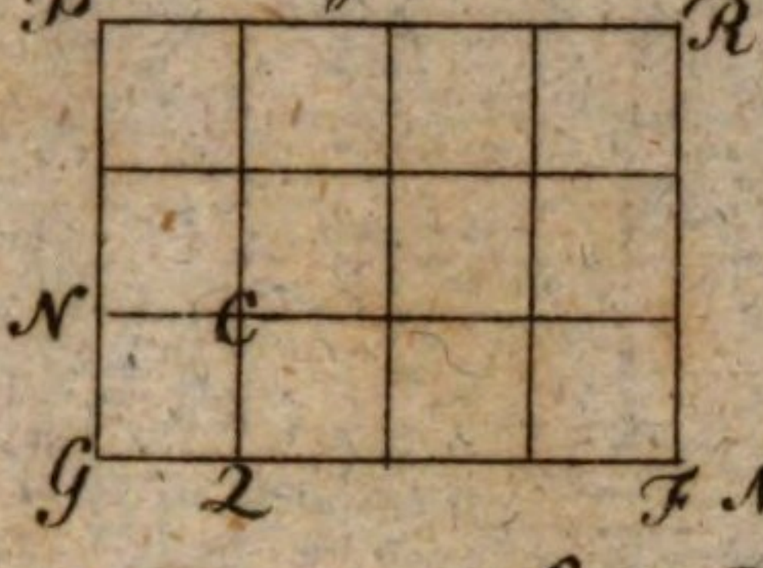


Fig. 63.

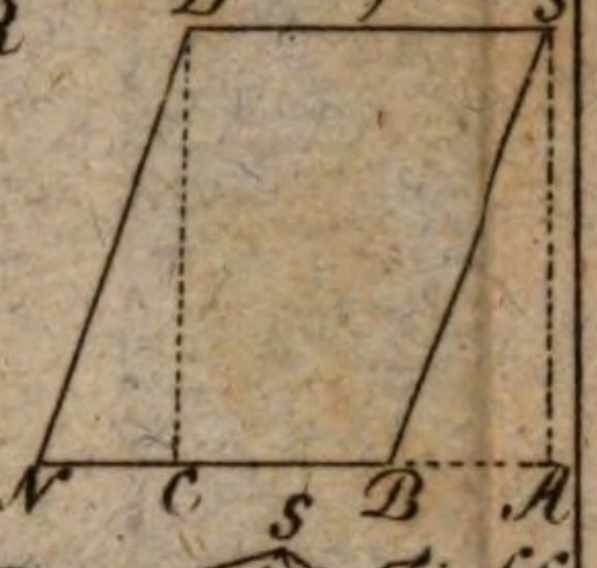


Fig. 65

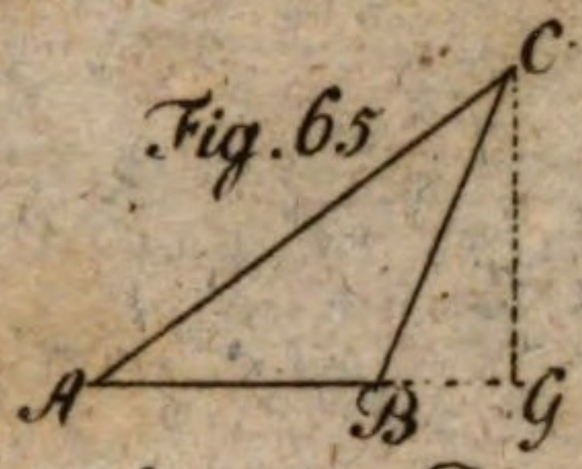
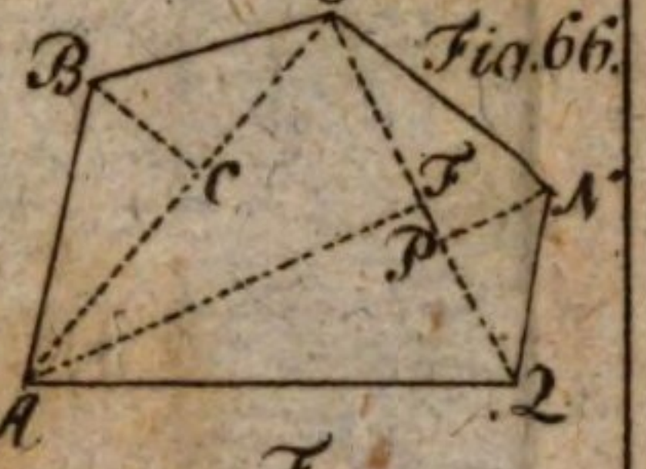


Fig. 66.



68.

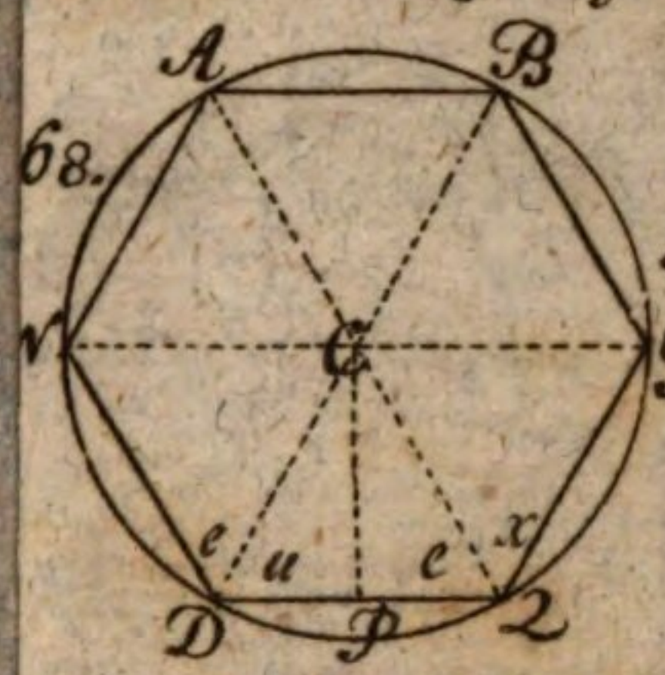
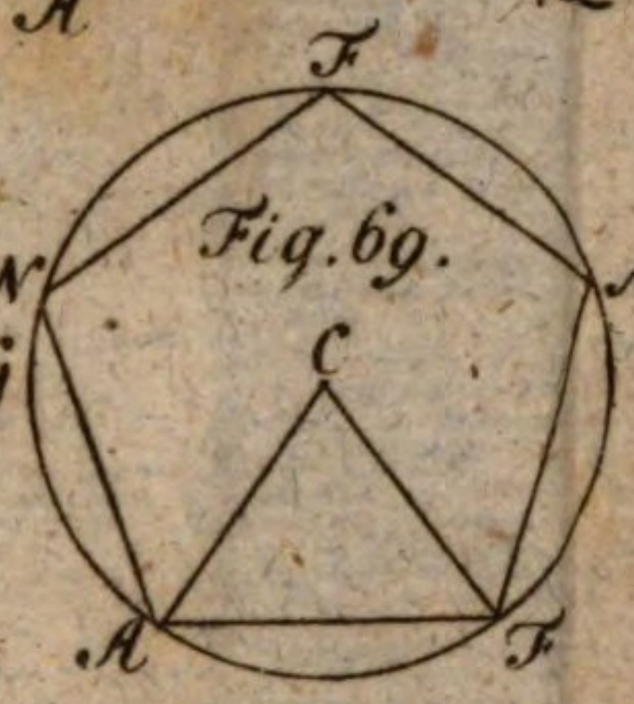


Fig. 69.



ig. 70.

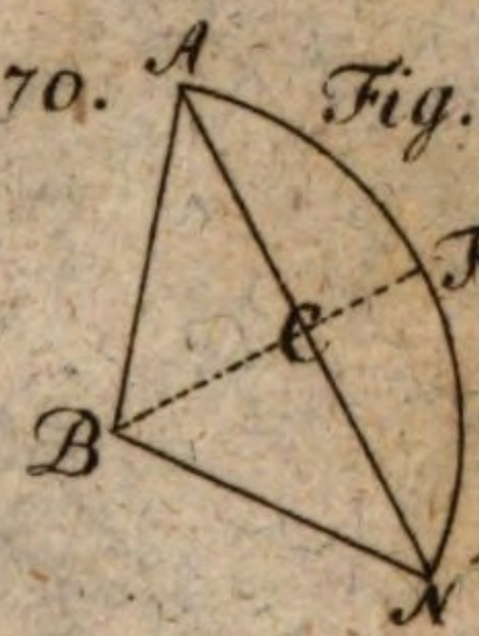


Fig. 71.

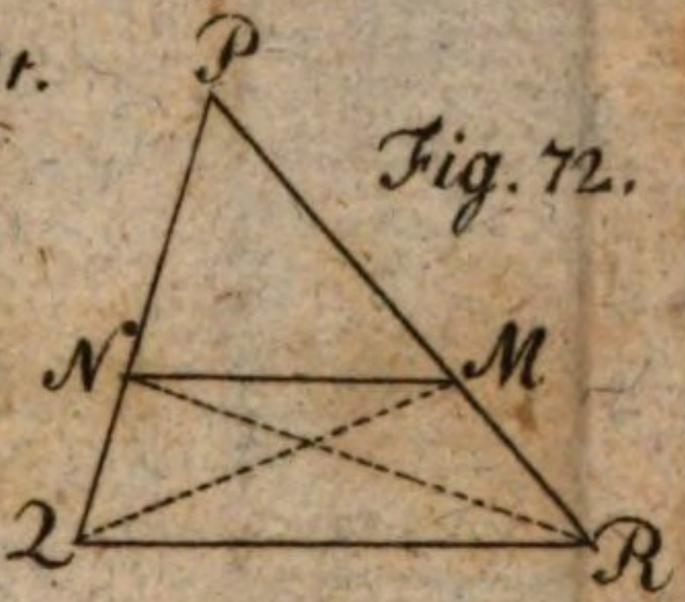


Fig. 72.

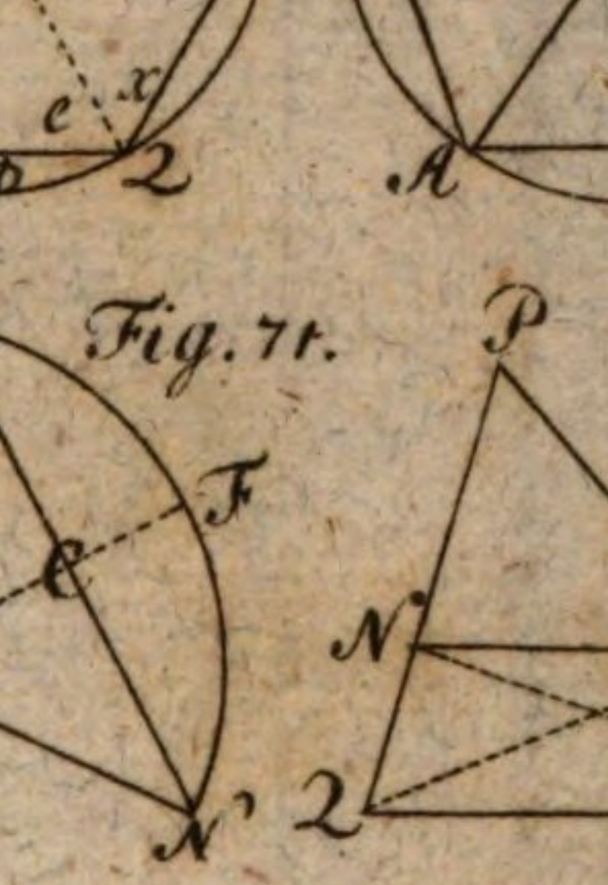


Fig. 74

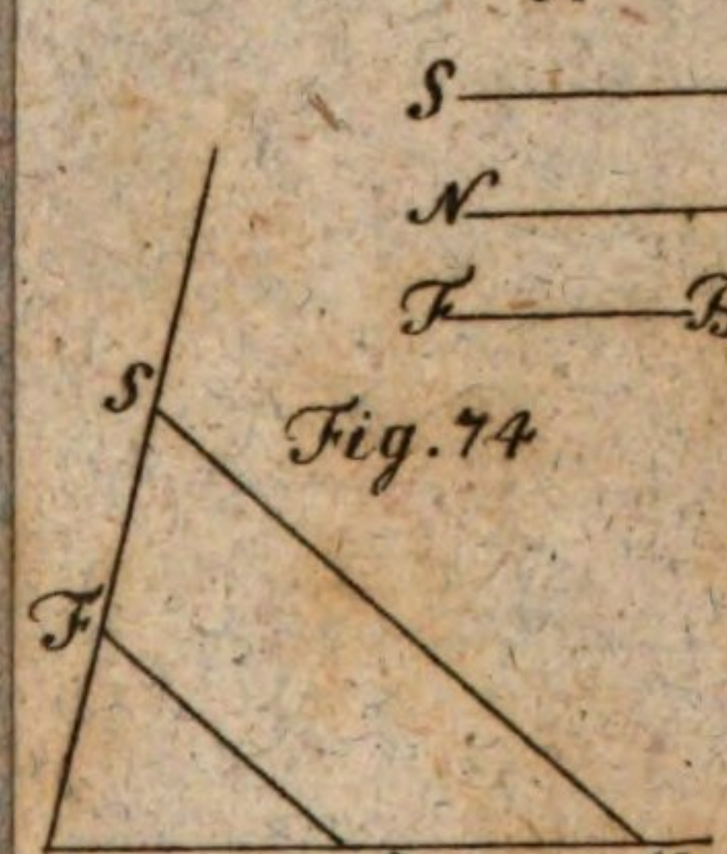
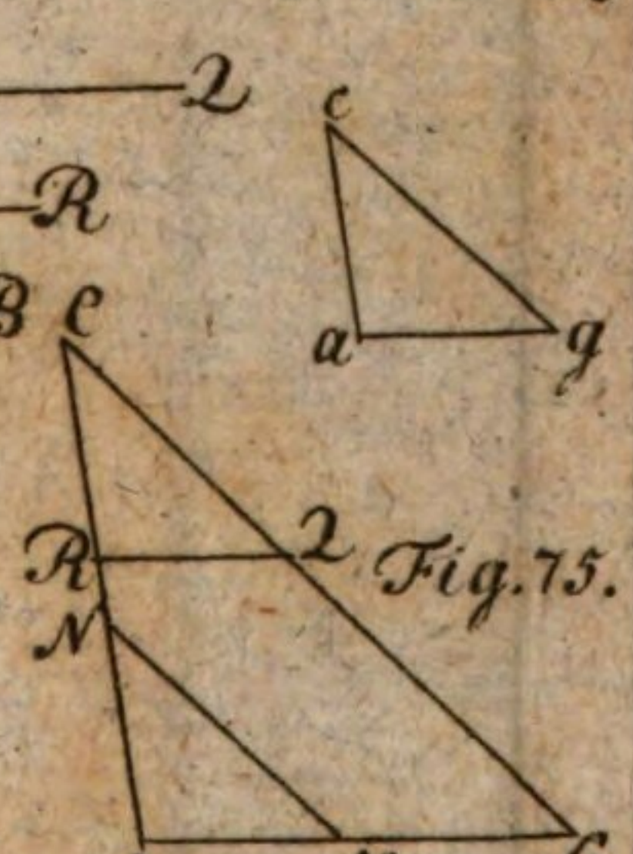


Fig. 75.



Tab. VI.

Fig. 76.

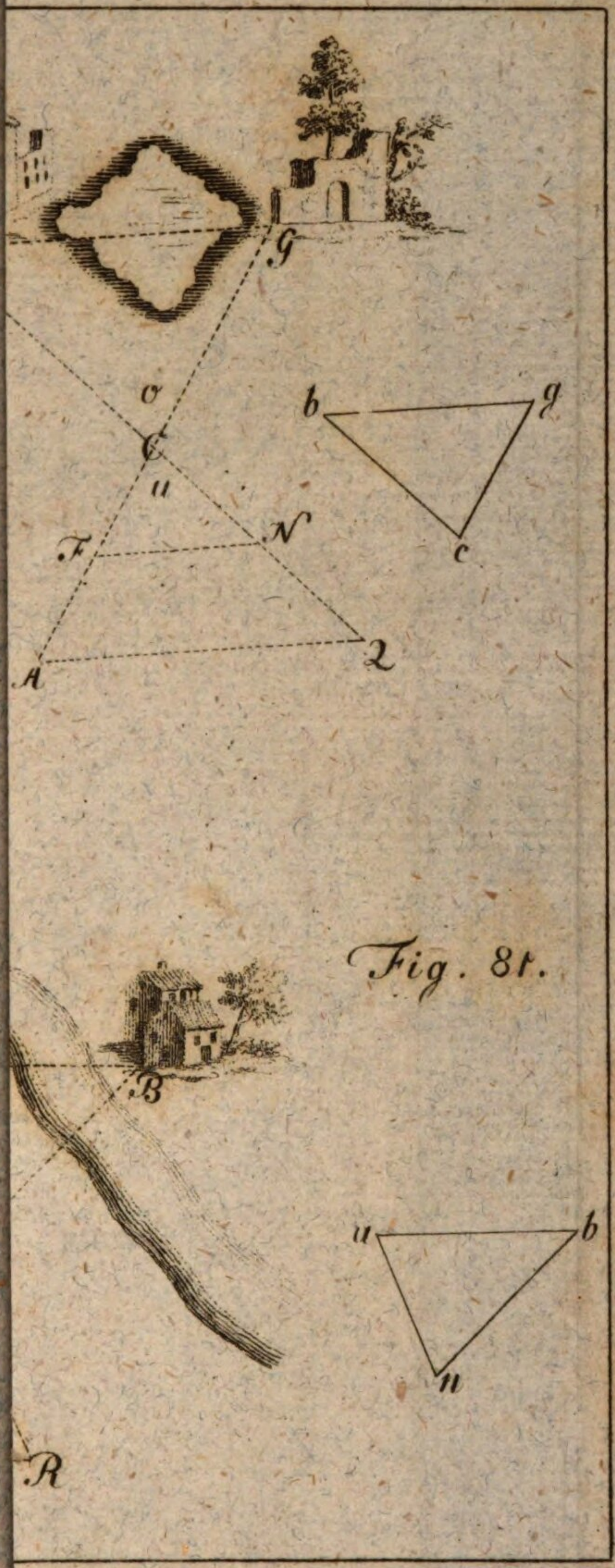
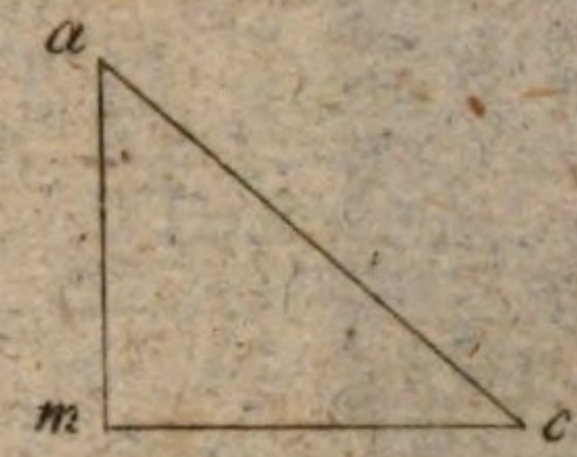
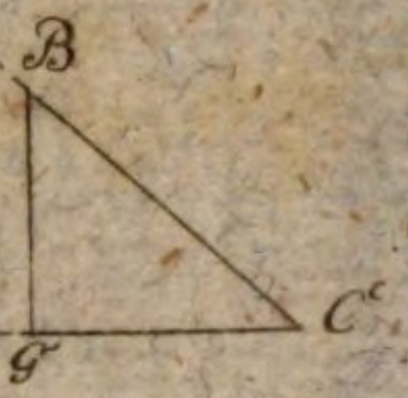


Fig. 81.

Fig. 84





85.

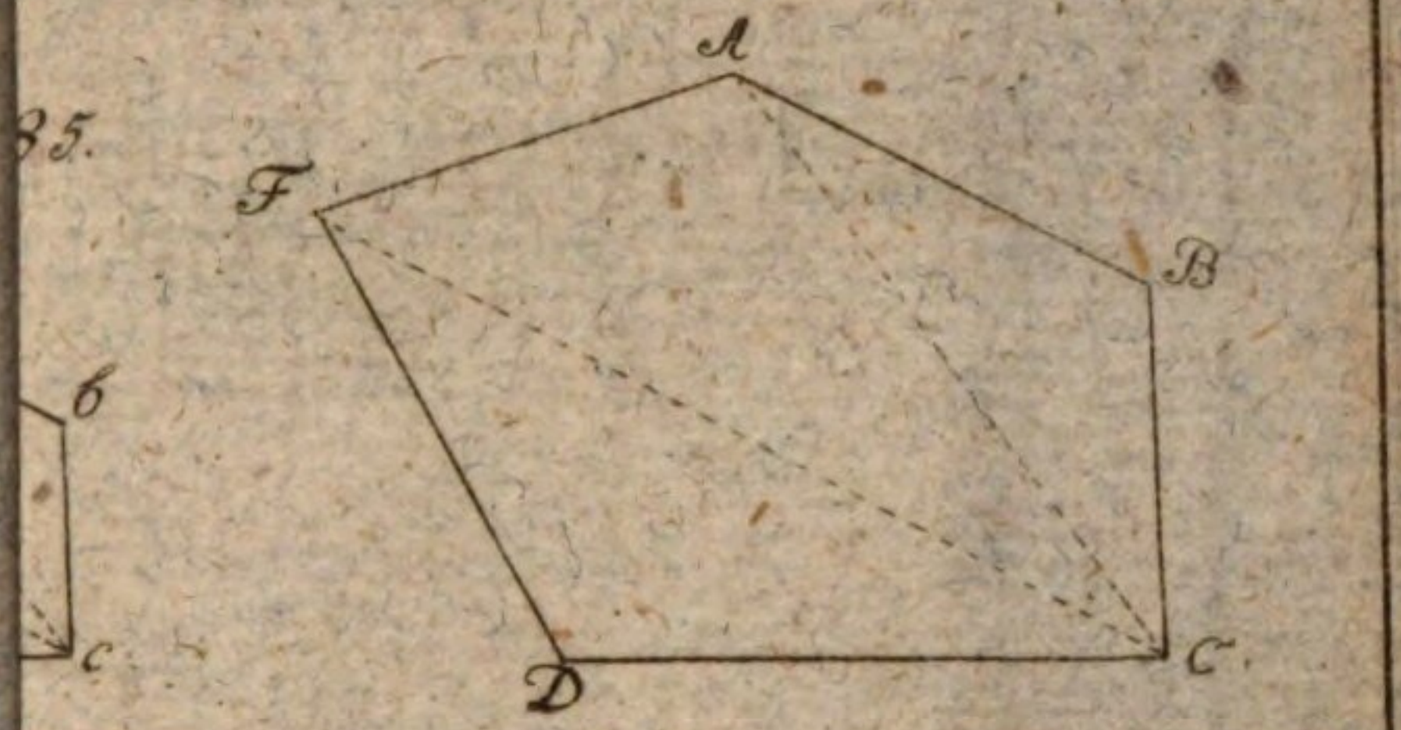


Fig. 86.

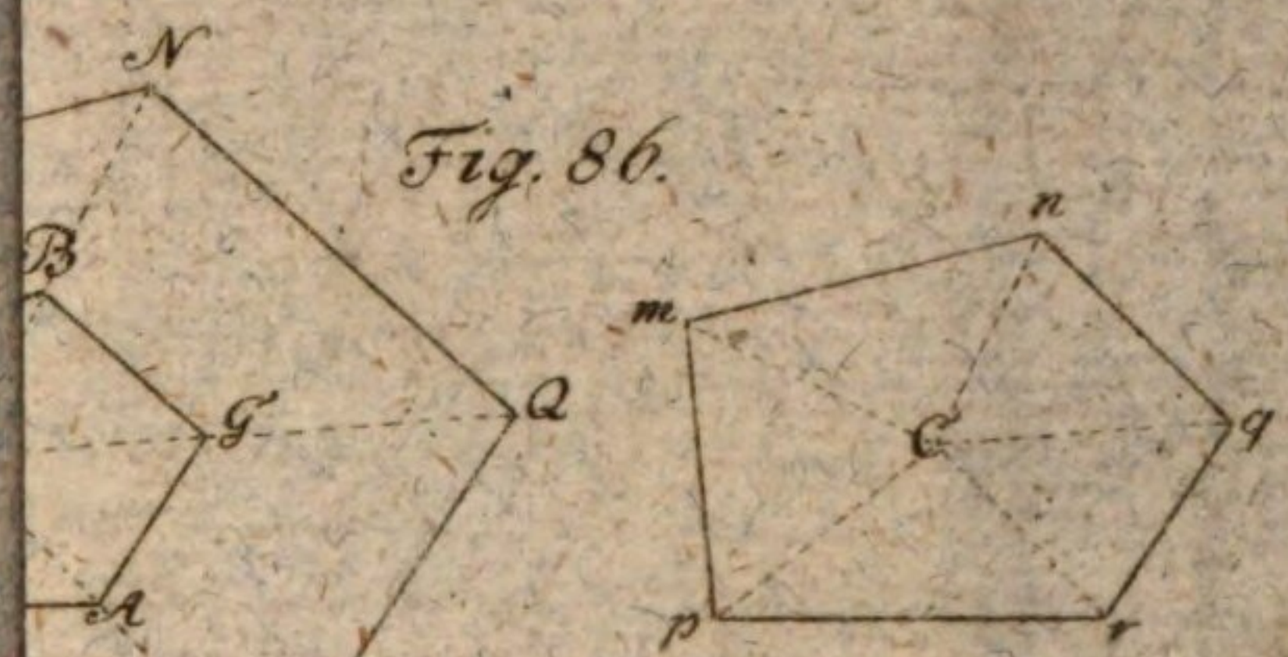


Fig. 87.

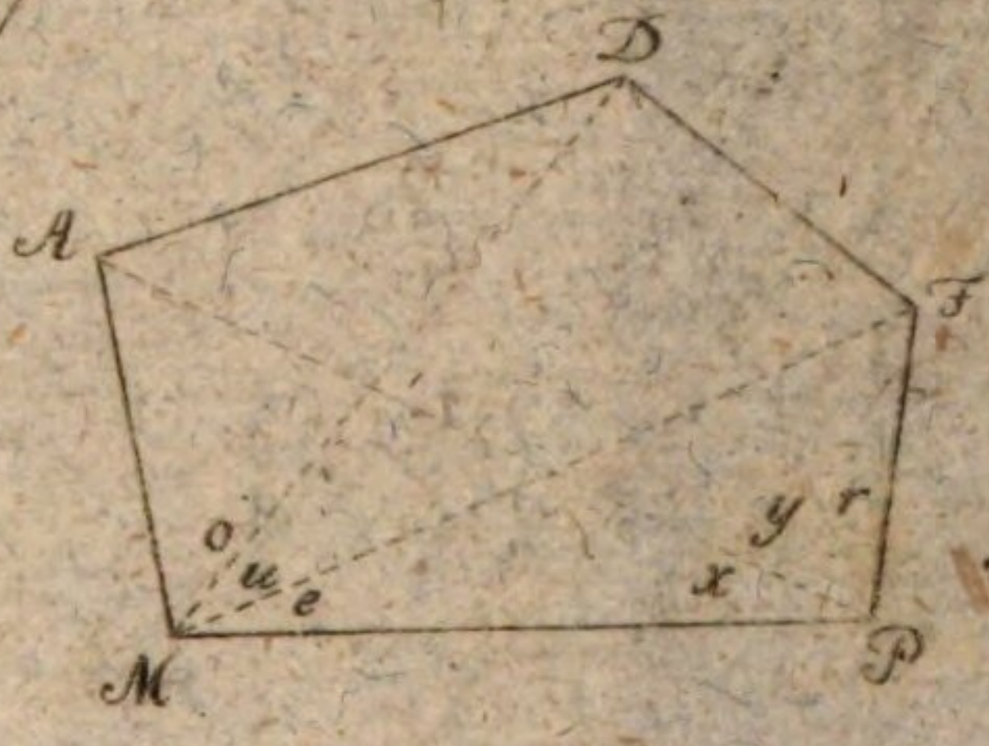


Fig. 88.

Fig. 90.

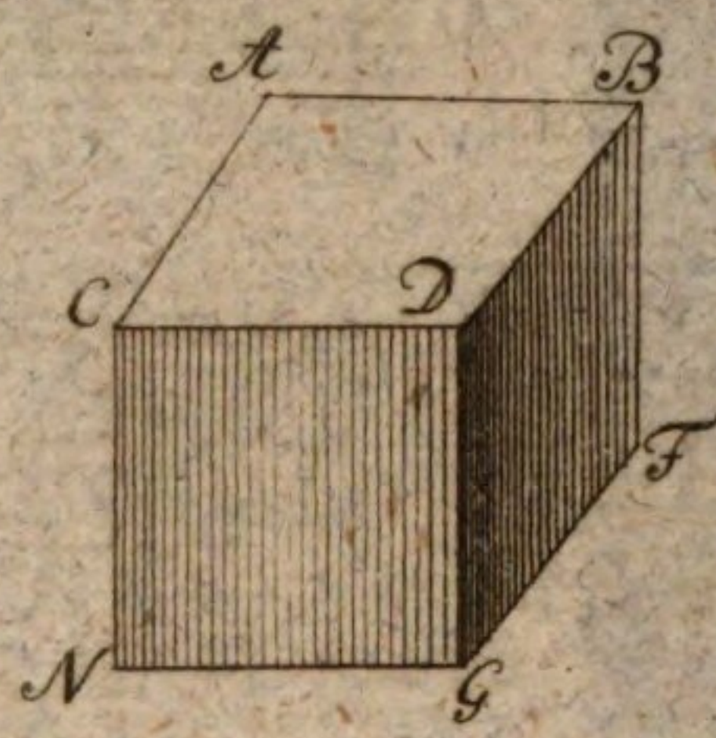


Fig. 92.

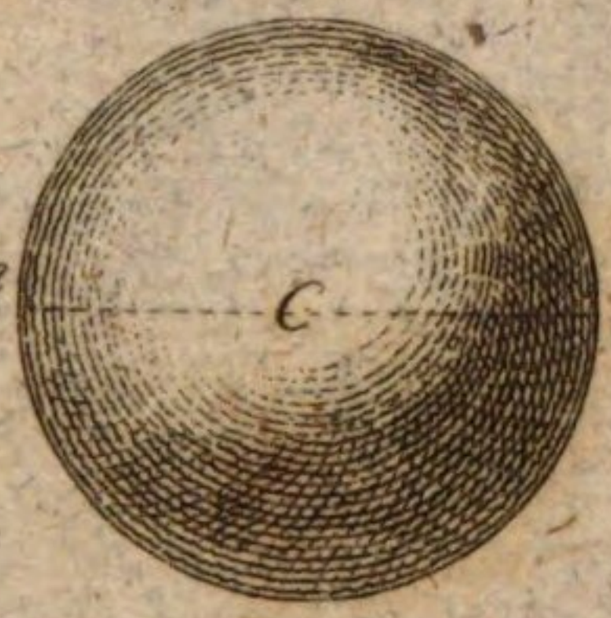


Fig. 93.

Tab. XI.

Fig. 97.

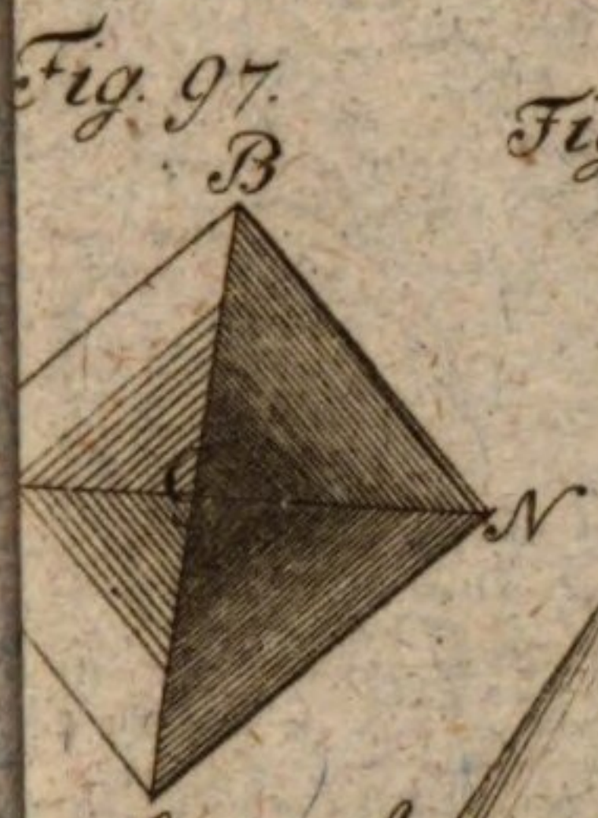


Fig. 96.

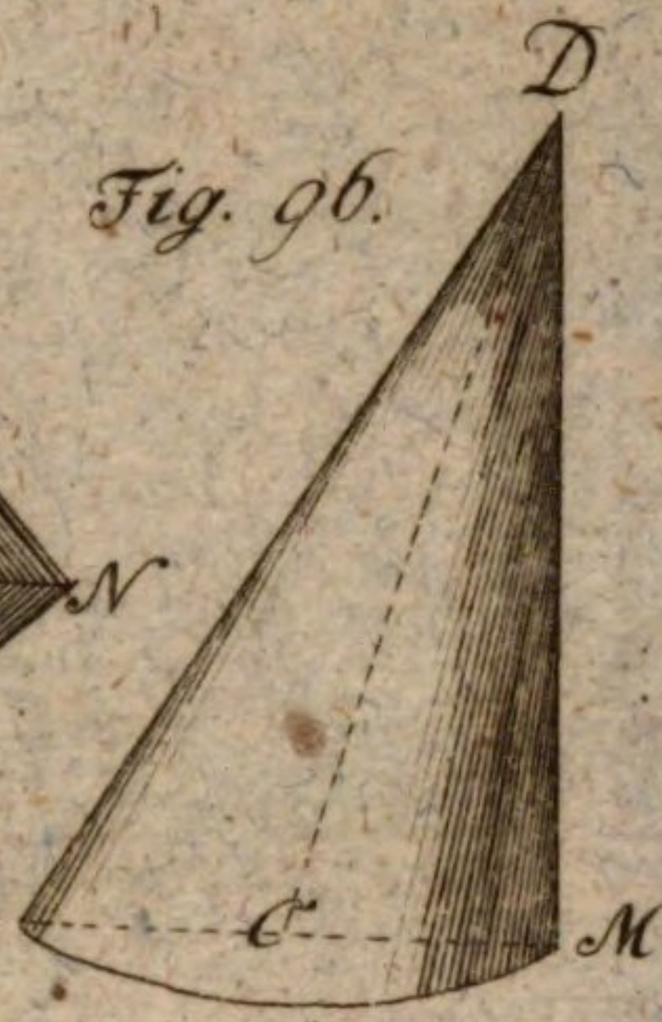
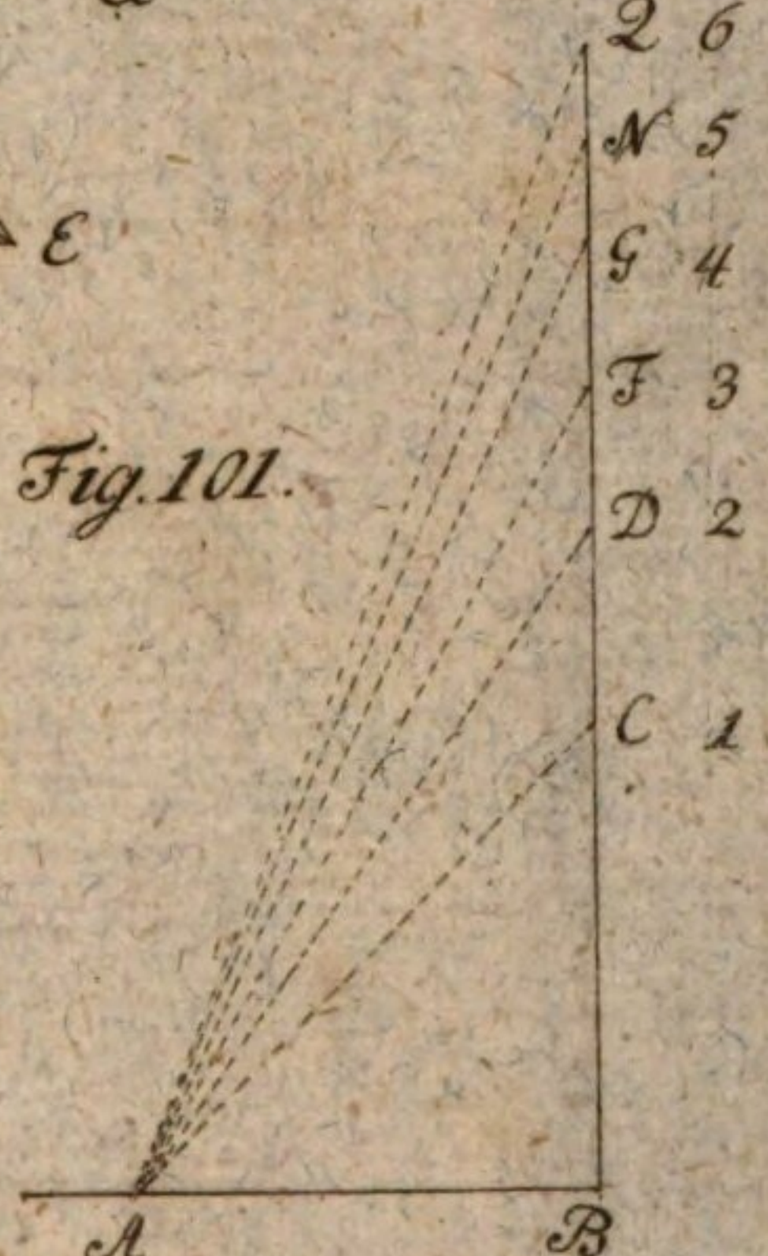


Fig. 99.

Fig. 100.

Fig. 101.



Tab. XII.

Fig. 104.

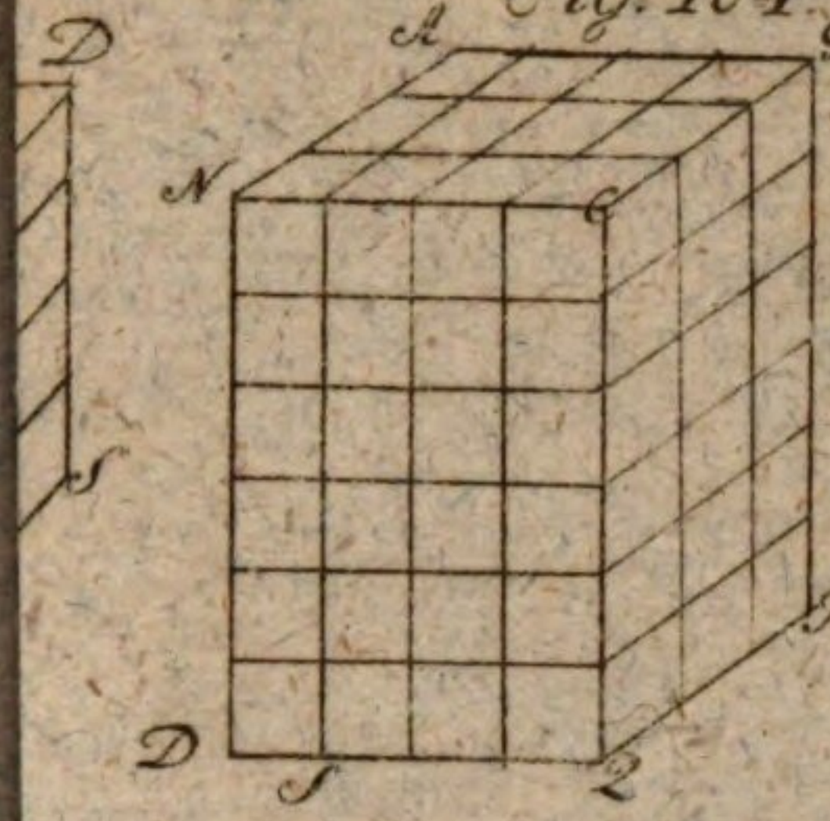


Fig. 105.

Fig. 107.

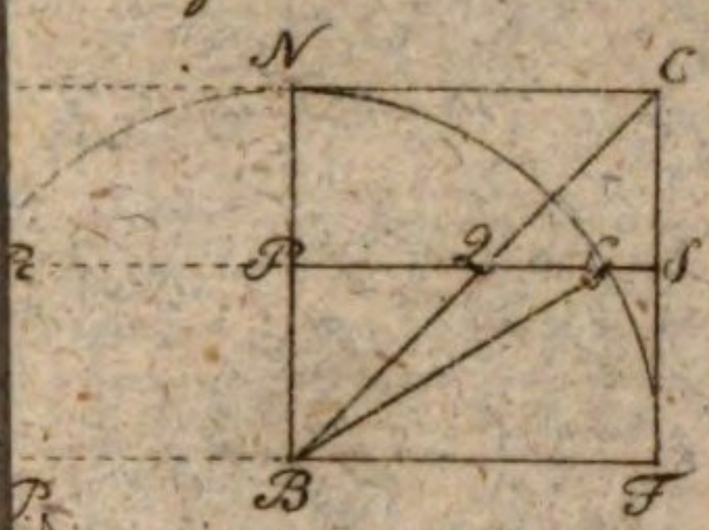


Fig. 108.

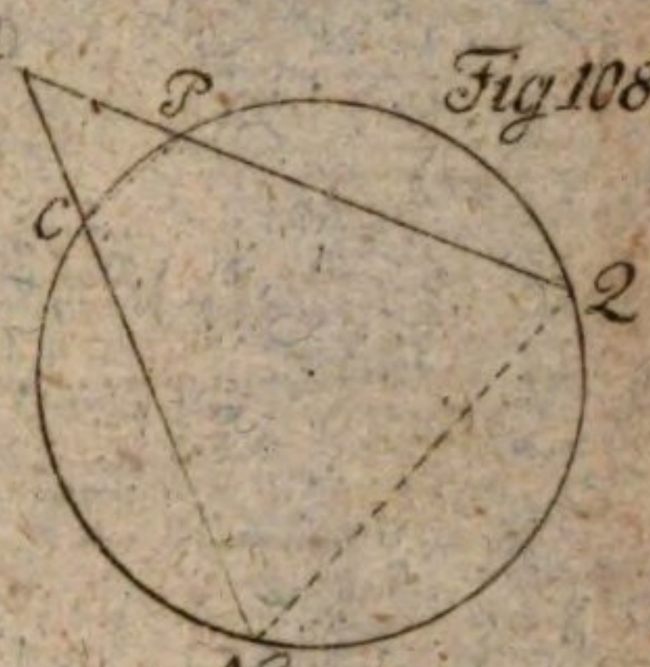


Fig. 110.

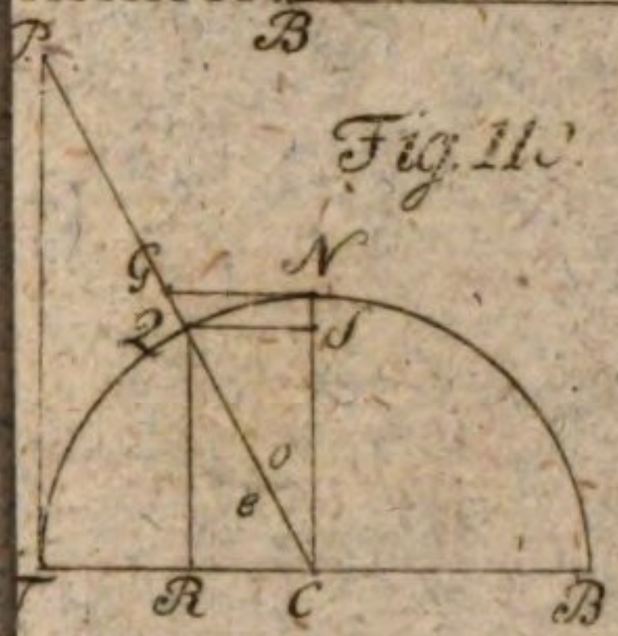


Fig. 111.

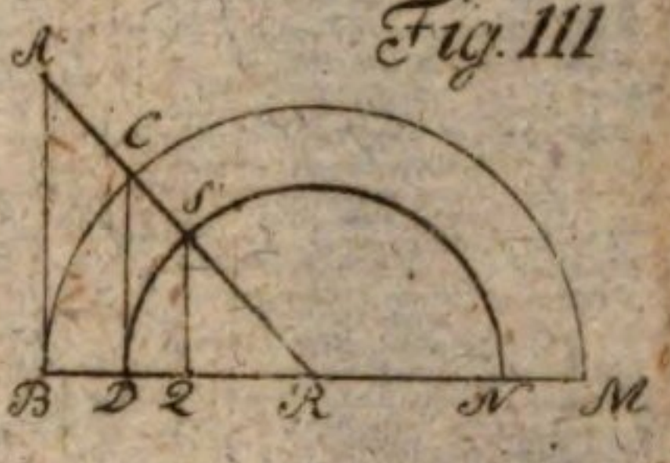


Fig. 113.

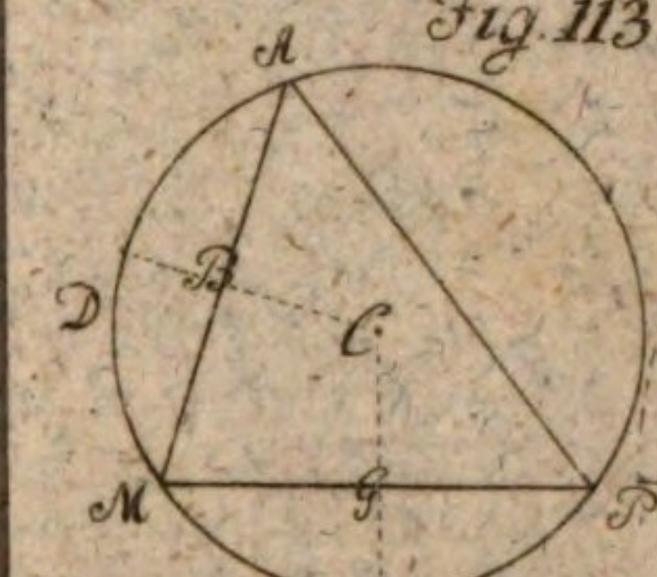


Fig. 114.

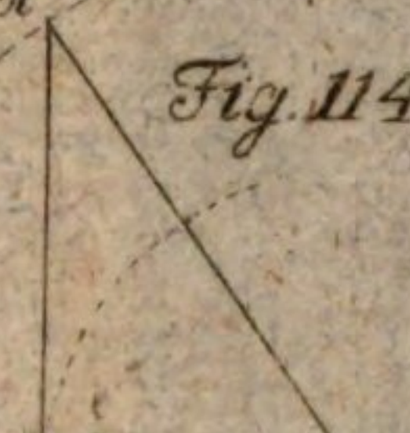
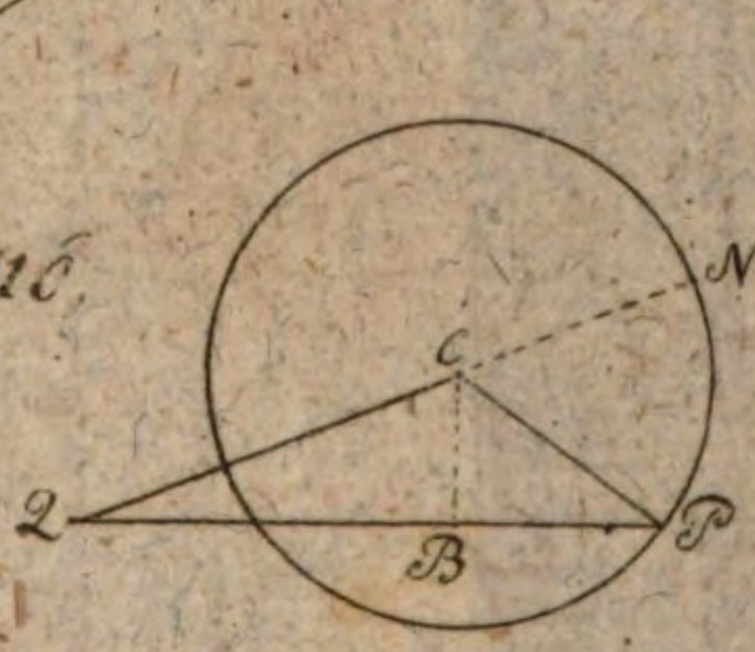


Fig. 116.



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ebert, Johann Jacob,

Anfangsgründe der Mathematik

Leipzig 1787

Math.u. 53
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593788-3
VD18 14443929-001